УДК 330.42

**С. Б. Кузнецов**
Сибирский институт управления — филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Новосибирск, Россия)

# МЕТАСТАБИЛЬНОСТЬ ЭКОНОМИКИ

Принята к публикации 05.11.2020

Изучается характер изменения основных факторов производства в детерминированном хаосе на основе осреднения. Экономическое число определяет состояние экономики. При увеличении экономического числа появляется некоторое критическое значение, начиная с которого развитие может стать неустойчивым, т. е. начинают наблюдаться кризисные явления. В окрестности критического значения экономического числа изучается поведение изменений основных факторов производства. Для оценки колебания критического значения используется представление функции в виде ряда Тейлора до пятого порядка точности. Получен интервал метастабильности экономики в зависимости от изменения экономического числа. Показано, что динамическое развитие экономики имеет только одну степень свободы, тогда как стационарное развитие полностью определено внешними условиями и не обладает степенями свободы.

*Ключевые слова*: основные факторы производства, экономическое число, «странный аттрактор», метастабильность экономики, стационарное развитие экономики
DOI: 10.32324/2412-8945-2020-4-44-49

В экономических системах априори происходит частичная потеря человеческих усилий, материальных ресурсов, основных средств, конечного продукта, информации, что крайне усложняет и делает слабо предсказуемой динамику развития экономической системы. Конечный продукт производства отражает только часть человеческих усилий, остальные усилия безвозвратно теряются. Естественны потери некоторой части материальных ресурсов при переработке любых компонентов производства в виде отходов. При передаче и обработке так же теряется или искажается часть информации. Существование таких неустранимых потерь (в математических терминах — рассеяния) указывает на принципиальную необратимость, нелинейность и неравновесность экономических процессов и явлений. Эти потери являются диссипативными издержками и указывают на диссипативность экономических систем.

Аттракторы (притягивающие множества) являются математическими образами режима функционирования диссипативной динамической системы[1], т. е. предельной траекторией, изображающей точки в фазовом пространстве, к которой стремятся все исходные режимы.

Кроме того, близкие к аттрактору траектории из его области притяжения стремятся к нему. Поэтому естественно считать траектории, принадлежащие аттрактору, устойчивыми. Следует отметить, что траектория этого аттрактора является непериодической (она не замыкается), кроме того, режим функционирования неустойчив, т. е. небольшие отклонения от заданного режима нарастают.

Такие аттракторы Ф. Такенс назвал «странными» [6, с. 372]. Свойства траекторий притягиваться к обычному аттрактору, представленному в виде цикла или точки, могут предсказывать поведение экономических систем с некоторой точностью. «Странные» аттракторы также позволяют определить общий вид поведения экономической системы.

«Странный» аттрактор легко объясняет появление «периодичностей» экономического развития разной длительности, нестрогую цикличность, существование продолжительных и коротких фаз в развитии, некоторую «размытость» в фазах циклов.

Рассмотрим экономическую среду, в которой экономические явления будут описываться функциями, непрерывно распределенными в пространстве с четырьмя степенями свободы: временем ($t$), трудовыми ресурсами ($L$), физическим капиталом ($K$), природными ресурсами ($H$). В дальнейшем будем полагать, если это специально не оговорено, что изучаемые явления рассматриваются в точке $\overline{r} = (L, K, H)$ (далее чер-

ISSN 2412-8945. Развитие территорий. 2020. № 4 (22).


[1] Диссипативной (неравновесной открытой) называется система, устойчивое состояние которой возникает в неравновесной среде при условии рассеяния (диссипации) энергии, поступающей из внешней среды.

точка вверху обозначения будет означать вектор) в момент времени *t*. Величина

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}(\bar{r}, t) = (v_K, v_L, v_H)$$

называется фазовой скоростью или скоростью развития основных факторов производства. Предположим, что коэффициент ведения бизнеса η и тензор сопротивления $\sigma_{pl}$ не зависят от времени:

$$\sigma_{pl} = \eta\left(\frac{\partial v_l}{\partial p} + \frac{\partial v_p}{\partial l}\right) + \theta v_p v_l,$$

где $pl$ — один из факторов производства $L, K, H$;

η — динамический коэффициент ведения бизнеса, отражающий связь развития основных факторов производства с инвестициями. Коэффициент не имеет размерности. Вспомогательный коэффициент θ имеет размерность (единица времени в квадрате) / (денежная единица в квадрате) [3, с. 44—45].

Пусть объем инвестиций в каждый из факторов производства определяется величиной $\bar{I} = (I_K, I_L, I_H)$. Предположим, что освоение инвестиций происходит мгновенно и $\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{j}$, тогда изменение факторов производства во времени будет описываться системой уравнений [3, с. 45]:

$$\frac{dv_p}{dt} - \mu\Delta v_p - \frac{\mu}{|\bar{v}|^2}\left(\bar{v}\cdot grad\left(\frac{\partial v_p}{\partial t}\right)\right) - \mu DIV\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right) = j_p, \quad (1)$$

где $p$ — один из основных факторов производства $(L, K, H)$, $\Delta\bar{v} = (\Delta v_L, \Delta v_K, \Delta v_H)$;

$\Delta v_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial H^2}$ — оператор Лапласа;

μ — коэффициент экономического состояния среды, $DIV(\bar{F}(\bar{r}, t)) = div(\bar{F}(\bar{r}, t)) + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\cdot\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}$.

В заданных стационарных условиях существует стационарное решение задачи (1) [4, с. 102—104]. Это решение формально существует при любых экономических числах [2, с. 406—414]. Но не всякие скорости обновления основных факторов производства, полученные при решении уравнения (1), могут существовать в описании экономического развития общества. Такие решения должны обладать устойчивостью к малым возмущениям, т. е. возникающие флуктуации должны постепенно затухать. Соответственно, развитие экономики будет неустойчивым, если любые малые флуктуации разрастаются. Но такой экономики в принципе существовать не может, она просто разрушится со временем.

Предположим, что имеется стационарное решение системы (1) $\bar{v}_0(\bar{r})$, на которое накладывается малое возмущение $\bar{v}_1(\bar{r}, t)$, вызванное некоторым экономическим или политическим фактором, приведшим к изменению объема инвестирования: новой государственной программой, запретительными действиями государства, забастовками рабочих предприятий, ограничительными действиями стран партнеров и т. п. Сумма возмущения и начального решения дает нестационарное решение системы уравнений (1):

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1.$$

В силу малости возмущения $\bar{v}_1(\bar{r}, t)$ можно предположить $|\bar{v}| \approx |\bar{v}_0|$. Как отмечалось, в наших предположениях любое возмущение в скорости обновления основных факторов производства связано с изменением уровня объема инвестиций

$$\bar{I} = \bar{I}_0 + \bar{I}_1.$$

Предположим, что инвестиции были разовые и не зависели от времени и объемов факторов производства, т. е.

$$DIV(\bar{I}_1) = 0,$$
$$\bar{j}_1 = 0.$$

На основании утверждения из работы [1, с. 74—75] имеем

$$DIV(\bar{v}_0) = DIV(\bar{I}_0).$$

В силу стационарности $\bar{v}_0(\bar{r})$ последнее равенство верно для статической дивергенции:

$$div(\bar{I}_0) = div(\bar{v}_0).$$

Известные функции начальной скорости $\bar{v}_0(\bar{r})$ и первоначальных инвестиций $\bar{j}_0(\bar{r})$ в условиях стационарности являются следствием (1) и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$v_{L0}\frac{\partial v_{p0}}{\partial L} + v_{K0}\frac{\partial v_{p0}}{\partial K} + v_{H0}\frac{\partial v_{p0}}{\partial H} = j_{p0} + \mu div\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial p}\right) + \mu\Delta v_{p0},$$

$$div(\bar{v}_0) = div(\bar{I}_0) = DIV(\bar{I}_0).$$

Подставляя значения $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1$ и $\bar{j} = \bar{j}_0$ в систему уравнений (1) с учетом последних двух равенств и условия малости возмущения $\bar{v}_0(\bar{r})$, т. е. $|\bar{v}| \approx |\bar{v}_0|$, получим

$$\frac{\partial v_{p1}}{\partial t} + \left(\bar{v}_0 \cdot grad v_{p1}\right) + \left(\bar{v}_1 \cdot grad v_{p0}\right) - \mu DIV\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial p}\right) -$$
$$-\mu\Delta v_{p1} - \frac{\mu}{|\bar{v}_0|^2}\left(\bar{v}_0 \cdot grad\frac{\partial v_{p1}}{\partial t}\right) = 0, \quad (2)$$

$$DIV(\bar{v}_1) = 0. \quad (3)$$

В этих равенствах были отброшены слагаемые второго порядка малости от возмущения $\overline{v}_1(\overline{r}, t)$, т. е. $\left(\overline{v}_1 \cdot grad v_{p1}\right)$ и $\frac{\mu}{\left|\overline{v}_0\right|^2}\left(\overline{v}_1 \cdot grad \frac{\partial v_{p1}}{\partial t}\right)$.

Таким образом, мы работаем в рамках линейной теории устойчивости, рассматривающей эволюции малых возмущений.

Линейная теория дает справедливые результаты только недалеко от порога возникновения неустойчивости. Минуя порог, возмущения возрастают, и линейные уравнения становятся некорректными. Но для определения порога и наиболее опасных возмущений такое приближение корректно. Граничными условиями являются нулевая нормальная составляющая скорости на границах коридора развития экономики и начальные и граничные данные в известный момент времени.

Уравнения (2) и (3) представляют собой однородную систему линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются функциями от основных факторов производства, но не от времени. Следуя общему для теории устойчивости способу, сумма частных решений уравнения дает общее. В уравнениях возмущение $\overline{v}_1(\overline{r}, t)$ обладает экспоненциальной зависимостью от времени $e^{-i\omega t}$ [5, с. 243—247]. Поиск частот возмущений ω сводится к решениям уравнений (2) и (3) с соответствующими граничными условиями. В общем случае получаемые частоты комплексные.

В случае положительного коэффициента при мнимой части частот множитель $e^{-i\omega t}$ будет иметь неограниченный рост во времени, т. е. неустойчивое развитие экономики. Поэтому для устойчивости необходимо, чтобы коэффициент при мнимой части частот был отрицателен. В этом случае возникающие флуктуации обладают свойством экспоненциального затухания со временем. Ясно, что при малых экономических числах $\left|E_0\right| << 1$ развитие экономики описывается «идеальным» уравнением:

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \left(\overline{v} \cdot \nabla\right) \overline{v} = \overline{j},$$

а значит, направленно развивается. При увеличении экономического числа $E_0$ появляется некоторое критическое значение $E_{кр}$, начиная с которого развитие может стать неустойчивым, т. е. начинают наблюдаться кризисные явления. Само значение $E_0$ зависит от интенсивности и масштабов возмущений, привносимых в развитие экономики (например, усиление сопротивления экономической среды или излишние экономические свободы). Критическое значение экономического числа не является универсальным, и для каждой национальной экономики в определенный момент развития существует своя величина $E_{кр}$. Из вида экономического числа следует, что чем большей предельной производительностью экономики χ обладает национальная экономика и чем меньше сопротивление экономической среды, тем меньше критическое значение $E_{кр}$ для экономики. Это понятно, так как в пределе приближаемся к «идеальной» экономике, для которой $E_{кр} \to 0$. Следовательно, получаем, что при стабильном развитии экономики происходит уменьшение экономического числа (что неизбежно во времени) и критическая граница также постепенно придвигается.

Многочисленные наблюдения показывают, что в экономике длительное время могут существовать только направленные режимы развития. Экономики, обладающие возмущениям, не затухающими во времени, являются неустойчивыми и разрушаются, превращаясь в иные, направленные формы развития, как это произошло с экономикой Советского Союза.

Таким образом, $E_{кр}$ является своеобразной границей для развития экономики: при $\left|E_0\right| < E_{кр}$ развитие экономики направленное, при $\left|E_0\right| > E_{кр}$ экономика теряет устойчивость. При значениях $\left|E_0\right| < E_{кр}$ и близких к $E_{кр}$ могут возникнуть переходные процессы в виде коротких кризисных моментов, не связанных с обшей картиной циклического развития экономики.

При переходе через критическое значение близкие траектории развития экономики могут быстро разойтись. Поэтому описание развития экономики ранее предложенными методами становится неэффективным.

В физике широко используется в этих случаях теория случайных полей, в которой все величины в турбулентном потоке записываются в виде суммы осреднений $\overline{\overline{\vartheta}}$ и отклонений от них $\vartheta'$-пульсаций.

При изучении поведения экономических величин в детерминированном хаосе нам требуется временное осреднение. В качестве фильтра возьмем функцию

$$\phi(\varsigma) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |\varsigma| < \frac{T}{2}, \\ 0, & |\varsigma| \geq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Здесь $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ — временной интервал осреднения. Тогда среднее значение некоторой функции $\varphi(t)$ вычисляется по формуле

$$\overline{\overline{\varphi(t)}} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Обратимся к изучению такого нестационарного развития экономики, которое возникает в результате неустойчивости стационарного развития при больших экономических числах $E_0$. При значениях $|E_0| < E_{кр}$ у комплексных частот

$$\omega = \xi_1 + i\gamma_1,$$

описывающих все возможные малые возмущения, мнимая часть отрицательна $(\gamma_1 < 0)$, так как развитие экономики направленное и скорость развития ограниченная. При значениях $|E_0| = E_{кр}$ появляется частота, у которой $\gamma_1 = 0$. При значениях $|E_0| > E_{кр}$ имеется частота $\gamma_1 > 0$, причем для $E_0$, близких к критическому значению $E_{кр}$, частота $\gamma_1 << \xi_1$. Спектр частот возмущений с $\gamma_1 > 0$ имеет дискретный вид, так как возмущения, которые отвечают частотам непрерывного спектра, не могут исчезать на бесконечности. Между тем на бесконечности скорости развития факторов экономики должны или стабилизироваться, или разрушаться. Скорость $\overline{v}_1(\overline{r}, t)$, соответствующая частоте стабилизации, имеет следующий вид:

$$\overline{v}_1(\overline{r}, t) = a(t)\overline{f}(\overline{r}),$$

где вещественная часть комплексной амплитуды

$$a(t) = ce^{\gamma_1 t}e^{-i\xi_1 t} \qquad (4)$$

с некоторым коэффициентом $c = const$, $\overline{f}(\overline{r})$ — некоторая комплексная функция от основных факторов производства.

Формула (4), описывающая поведение $a(t)$, работает в течение короткого промежутка времени сразу же после появления нестабильности в экономике, потому что множитель $e^{\gamma_1 t}$ быстро растет, а рассматриваемый прием используется только для малых значений $\overline{v}_1(\overline{r}, t)$ [6, с. 137—139]. На самом деле модуль амплитуды любого нестационарного развития экономики не может расти неограниченно: изменяясь во времени, он устремляется к конечному числу. При значениях $E_0$, близких к $E_{кр}$, такой предел достаточно мал, а далее начинает расти.

Оценим величину амплитуды в окрестности $E_{кр}$. В малом промежутке времени, когда верно представление (4), имеем

$$|a|^2 = c^2 e^{2\gamma_1 t}$$

или

$$\frac{d|a|^2}{dt} = 2\gamma_1 |a|^2.$$

Полученное выражение является представлением функции в виде ряда Тейлора с точностью первого порядка. Для больших значений $|a|^2$ требуется учитывать последующие члены ряда Тейлора, которые будут иметь третий порядок от $|a|$ и выше. Точное определение производной не будет столь актуальным, важнее знание среднего значения по времени, причем необходимо производить усреднение по промежуткам времени, большим в сравнении с временным периодом $T > \frac{2\pi}{\xi_1}$ циклического множителя $e^{-i\xi_1 t}$. Следует заметить, что при $\gamma_1 << \xi_1$ рассматриваемый период достаточно маленький, если сравнивать с временем $t = \frac{1}{\gamma_1}$, за который происходит реальное изменение $|a|^2$. Заметим, что члены третьего порядка при осреднении дают величины четвертого порядка. Поэтому с точностью до четвертого порядка осредненная производная имеет вид:

$$\overline{\overline{\frac{d|a|^2}{dt}}} = 2\gamma_1 |a|^2 - \alpha |a|^4. \qquad (5)$$

Знак осреднения над величинами $|a|^2$ и $|a|^4$ не пишется, так как временные промежутки осреднения малы по сравнению с $\frac{1}{\gamma_1}$. Подобное уравнение возникает в гидродинамике при изучении вихревого движения жидкости. Величина α может быть положительной или отрицательной и носит название постоянной Ландау.

Рассмотрим случай, когда значение $|E_0| > E_{кр}$ и появляется первое неустойчивое малое возмущение. Этот случай возникает при $\alpha > 0$. По причине, что осреднения над правой частью уравнения (5) нет, решаем его, предполагая, что в левой части осреднения тоже не было. Тогда решением уравнения будет следующее выражение:

$$|a|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + c_0 e^{-2\gamma_1 t}.$$

Отсюда следует, что величина $|a|^2$ с ростом времени стремится к максимальному значению:

$$|a|^2_{\max} = \frac{2\gamma_1}{\alpha}.$$

Параметр $\gamma_1$ зависит от экономического числа $E_0$, разложим $\gamma_1$ по степеням $|E_0| - E_{кр}$ по формуле Тейлора. Как отмечалось ранее, при $|E_0| = E_{кр}$ имеет место равенство

$$\gamma_1\left(E_{кр}\right) = 0,$$

поэтому до второго порядка точности имеем равенство

$$\gamma_1 = c_1\left(\left|E_0\right| - E_{кр}\right),$$

где $c_1$ — *const*.

На основании последнего равенства для амплитуды получим

$$\left|a\right|_{\max} \approx \sqrt{\left|E_0\right| - E_{кр}}. \qquad (6)$$

Рассмотрим уравнение (5), когда $\alpha < 0$. В этом случае для нахождения максимальной амплитуды недостаточно знания двух членов разложения ряда Тейлора, необходимо учитывать отрицательный член разложения более высокого порядка. Как и при получении равенства (5), член разложения пятого порядка при осреднении дает величину порядка $\left|a\right|^6$. В результате получим

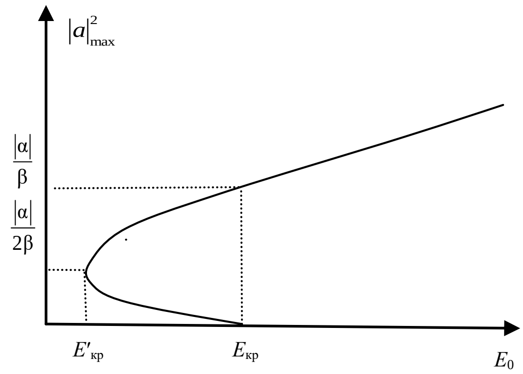
$$\frac{\overline{\overline{d\left|a\right|^2}}}{dt} = 2\gamma_1\left|a\right|^2 - \alpha\left|a\right|^4 - \beta\left|a\right|^6,$$

где величина $\beta > 0$.

Максимальное значение амплитуды получим при равенстве производной нулю. Окончательно имеем

$$\left|a\right|^2_{\max} = \frac{\left|\alpha\right|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma_1}{\beta}} = \frac{\left|\alpha\right|}{2\beta} \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2c_1\left(\left|E_0\right| - E_{кр}\right)}{\beta}}.$$

Последнее равенство можно представить графически (рисунок).




Критические значения экономического числа

При экономическом числе, превышающем критическое значение $\left|E_0\right| > E_{кр}$, стационарное развитие не может существовать. При значении экономического числа $\left|E_0\right| = E_{кр}$ флуктуации скачкообразно возрастают до максимальной амплитуды, предполагаемой все же малой, что делает использование разложения Тейлора по степеням $\left|a\right|^2$ возможным. При попадании экономического числа в интервал

$$E_{кр} > \left|E_0\right| > E'_{кр} = E_{кр} - \frac{\alpha^2}{8c_1\beta}$$

основное развитие экономики метастабильно. Другими словами, развитие устойчиво относительно бесконечно малых флуктуаций, но является неустойчивым по отношению к возбуждениям конечной амплитуды. Понятно, что чем больше $c_1$ и $\beta$, тем меньше интервал метастабильности экономики.

Рассмотрим нестационарное развитие экономики, которое возникает при значении $\left|E_0\right| > E_{кр}$ в результате неустойчивости по отношению к мелким флуктуациям. При значениях экономического числа $E_0$, близких к критическому значению $E_{кр}$, это развитие представимо в виде суммы стационарного развития $\bar{v}_0(\bar{r})$ и циклического изменения $\bar{v}_1(\bar{r}, t)$ с небольшой конечной амплитудой, возрастающей при увеличении экономического числа по правилу (6). Распределение скоростей обновления факторов производства в таком развитии представимо в виде

$$\bar{v}_1(\bar{r}, t) = \bar{f}(\bar{r})e^{-i(\xi_1 t + \beta_1)},$$

где $\bar{f}(\bar{r})$ — некоторая комплексная функция от факторов производства;

$\beta_1$ — начальная фаза.

В случае больших значений разности $\left|E_0\right| - E_{кр}$ представление скорости в виде двух частей теряет смысл. Потому что функционирование свелось к циклическому развитию с частотой $\xi_1$. Рассмотрим случай, когда вместо $t$ будем использовать как независимую переменную фазу:

$$\varphi_1 = \xi_1 t + \beta_1,$$

тогда отсюда следует, что функция $\bar{v}(\bar{r}, t)$ является периодической от φ с периодом 2π. Представим ее как ряд Фурье:

$$\bar{v}(\bar{r}, t) = \sum_p a_p(\bar{r}) e^{-i\varphi_1 p}.$$

Функция $\bar{v}(\bar{r}, t)$ состоит из членов основной частоты $\xi_1$ и также из членов, кратных ей. Здесь суммируется по всем целым числам.

С помощью уравнения (5) определяется только абсолютная величина временного множителя $a(t)$, но не находится его фаза $\varphi_1$. Величина фазы неопределенна и будет зависеть от случайных начальных условий, поэтому начальная фаза $\beta_1$ теоретически может принимать любое значение.

Получили, что циклическое развитие не определяется однозначно знанием заданных стационарных внешних условий, в которых развитие происходит. В изучаемом процессе начальная фаза скорости развития основных факторов производства остается произвольной. Следовательно, нестационарное развитие экономики имеет только одну степень свободы, тогда как стационарное развитие полностью определено внешними условиями и не обладает степенями свободы.

**Список литературы**

1. *Кузнецов С. Б.* Динамическое обновление факторов производства. Новосибирск : ЦПИ : Сибпринт, 2010. 312 с.

2. *Кузнецов С. Б.* Моделирование влияния экономической среды на факторы производства // Перспективы науки. 2016. № 7 (82). С. 43—46.

3. *Кузнецов С. Б.* Экономическое число — показатель эффективности национальной экономики // European Social Science Journal. 2014. Т. 1, № 3 (42). С. 406—414.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М. : Физматлит, 2006. Т. 6. 137 с.

5. *Романенко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М. : Лаб. баз. знаний, 2000. 344 с.

6. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. Warlock, 1980. P. 898.

**S. B. Kuznetsov**

## METASTABILITY OF THE ECONOMY

The nature of changes in the main production factors in deterministic chaos is studied on the basis of averaging. The economic number determines the state of the economy. With an increase in the economic number, a certain critical value appears, starting from which development can become unstable, i. e., crisis phenomena begin to be observed. In the vicinity of the critical value of the economic number, the behavior of changes in the main factors of production is studied. To estimate the fluctuation of the critical value, the function is represented as the Taylor series up to the fifth order of accuracy. The interval of metastability of the economy depending on the change in the economic number is obtained. It is shown that the dynamic development of the economy has only one degree of freedom, while the stationary development is completely determined by external conditions and does not have degrees of freedom.

*Keywords*: main factors of production, economic number, “strange attractor”, metastability of the economy, stationary development of the economy.