

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА

Сергей Борисович Кузнецов¹, Евгений Вячеславович Кулигин²

^{1,2} Сибирский институт управления — филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация

¹ kuznetsov-sb@ranepa.ru

² kuligin-ev@ranepa.ru

Аннотация. Вопросы численного моделирования валового продукта с учетом ресурсов и возможностей региона являются по сей день актуальной проблемой. Основной задачей работы было создание модели валового регионального продукта на базе конечно-временной схемы интегро-дифференциального уравнения. Полученное уравнение определяет прирост валового регионального продукта, опираясь на изменения факторов производства: основных фондов производства, природных и трудовых ресурсов. Основным результатом в представленной работе является получение конечно-временной модели уравнения и ее верификация. При получении прогнозного значения валового регионального продукта используются значения валового регионального продукта и основных факторов производства двух предыдущих лет. Выполнено численное моделирование изменения валового регионального продукта в период с 2005 по 2018 г. Численные результаты показали хорошую сопоставимость с реальными данными в периоды стабильного развития экономики, но в кризисные и посткризисные периоды удается уловить динамику изменений. Рассмотренный конечно-разностный аналог уравнения может стать еще одним инструментом при прогнозировании валового регионального продукта в краткосрочной перспективе.

Ключевые слова: валовой региональный продукт, основные факторы производства, математическое моделирование валового регионального продукта, конечно-разностный аналог, точности численного моделирования, эконометрическая модель, динамическая дивергенция

Для цитирования: Кузнецов С. Б., Кулигин Е. В. Интегро-дифференциальная модель оценки валового регионального продукта. 2022. № 2. С. 15—21. DOI: 10.32324/2412-8945-2022-2-15-21.

Economic research

Original article

INTEGRO-DIFFERENTIAL EVALUATION MODEL GROSS REGIONAL PRODUCT

Sergey B. Kuznetsov¹, Evgeny V. Kuligin²

^{1,2} Siberian Institute of Management — branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration. Novosibirsk, Russian Federation.

¹ kuznetsov-sb@ranepa.ru

² kuligin-ev@ranepa.ru

Abstract. The issues of numerical modeling of the gross product, based on the knowledge of the resources and capabilities of the region, is still an urgent problem. The main task of the work was to create a model of the gross regional product based on the finite-time scheme of the integro-differential equation. The resulting equation will determine the growth of the gross regional product based on changes in production factors: fixed assets, natural and labor resources. The main result in the presented work is obtaining a finite-time model of the equation and its verification. When obtaining the forecast value of the gross regional product, the values of the gross regional product and the main factors of production of the previous two years are used. The considered finite-difference analogue of the equation can become another tool for forecasting the gross regional product in the short term.

Keywords: gross regional product, main factors of production, mathematical modeling of gross regional product, finite-difference analogue, numerical simulation accuracy, econometric model, dynamic divergence

For citation: Kuznetsov S.B., Kuligin E.V. Integro-differential evaluation model gross regional product. Territory Development. 2022;(2):15—21. (In Russ.). DOI: 10.32324/2412-8945-2022-2-15-21.

Введение

Одним из основных показателей, определяющих уровень экономического развития региона и его потенциальные возможности, выступает валовой региональный продукт (ВРП). Временной анализ развития ВРП является основой для разра-

ботки и принятия региональных программ развития. Поэтому численное моделирование и прогнозирование ВРП на протяжении многих лет является актуальной задачей в планировании экономики.

Задача работы состоит в получении прогнозного значения ВРП исходя из знания объемов ВРП и основных факторов производства в течение последних двух лет. В качестве основных

факторов производства рассматриваются трудовые и природные ресурсы, основные фонды.

Вопросами создания прогнозных моделей для валового продукта занимался ряд ученых-экономистов Э. Б. Алаев [1], А. О. Баранов [2], Г. А. Гранберг [3], Е. Г. Егоров [4], В. В. Леонтьев [5], П. А. Минакир [6], Т. Г. Морозова [7], Н. Н. Некрасов [8], В. С. Немчинов [9], В. И. Суслев [10] и др. Работы этих авторов посвящены обоснованию теоретических и методологических вопросов, возникающих при прогнозировании региональных экономических систем. Центральное место в прогнозировании ВРП занимает модель межотраслевого баланса, основы которой заложили и развили в своих трудах В. В. Леонтьев [5], А. М. Гатаулин [11], Г. А. Гранберг [3], С. А. Суспицын [12] и др.

В настоящее время аппарат анализа и прогнозирования ВРП обладает множеством математических инструментов. На основе прогнозов строится межрегиональная политика государства, нацеленная на уменьшение диспропорций между регионами и эволюцию субъектов Российской Федерации. Поэтому статистические модели должны быть достаточно точными и объективно оценивать состояние региона.

Методология

Математический аппарат, на котором базируется данная работа, был разработан в монографии [13], и описанный алгоритм является логическим продолжением одной из идей.

Объем валового регионального продукта Y указывает на возможности, но не позволяет оценить эффективность экономики региона. Мы будем рассматривать отношение прироста валового регионального продукта к приросту факторов производства, которые были затрачены или применены в процессе производства, а точнее, предельных производительностей, фондоотдачи и эффективности природных ресурсов. Эти величины будем использовать при построении нашей модели. В работе предполагается, что ВРП можно представить в виде непрерывной функции, определенной в четырехмерном пространстве: время t , трудовые ресурсы L , основные фонды K , природные ресурсы H .

Рассмотрим в этом пространстве в некоторый момент времени произвольную точку с координатами $\bar{r} = (L, K, H)$. Первая производная по времени от вектора координат

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}(\bar{r}, t)$$

определяет прирост основных факторов производства.

Фазовым объемом используемых факторов будет их произведение. Введем обозначение фазового объема $w = L \cdot K \cdot H$ и в дальнейшем будем называть его просто объемом.

В любой момент времени для произвольной точки нашего пространства определяется вектор изменения факторов производства:

$$\bar{v} = v_L \bar{i} + v_K \bar{j} + v_H \bar{k},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — базис в пространстве (L, K, H) .

Величина скорости определяется из равенства

$$|\bar{v}| = \sqrt{(v_L)^2 + (v_K)^2 + (v_H)^2}.$$

В работе [14, с. 152—153] была разработана интегро-дифференциальная модель, которая может быть представлена в виде

$$\int_w \left(\Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} \right) dw = Y(\bar{r}_1) - Y(\bar{r}_2),$$

где $\Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial H^2}$ — оператор Лапласа;

\bar{r}_1 и \bar{r}_2 — векторы факторов производства в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Объем w вычисляется в виде произведения приростов факторов производства за период времени от t_1 до t_2 [15, с. 117].

В качестве начальных и граничных условий будем рассматривать известный валовой региональный продукт $Y(\bar{r}_1)$, который был произведен в регионе в прошедший момент времени t_1 . Нам известно, какой объем факторов производства \bar{r}_1 был затрачен или был применен для производства $Y(\bar{r}_1)$ в этот момент времени. Момент времени t_2 может быть выбран произвольно. Последнее уравнение является интегро-дифференциальным и позволяет вычислить валовой региональный продукт с учетом изменения факторов производства:

$$\int_w \left(\Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} \right) dw + Y = Y(\bar{r}_1). \quad (1)$$

В предлагаемом уравнении для определения прогнозного значения ВРП используются известные значения основных факторов производства и ВРП за прошлые периоды. Предлагаемая конечно-разностная модель опирается на знание двух предыдущих лет.

Результаты

Используя конечно-временную схему, основанную на децентрированных разностях, получим формулу (1) в конечно-разностном представлении:

$$Y_{i+1} = \frac{B}{A} Y_i - \frac{C}{A} Y_{i-1},$$

Параметры A , B , C определяются следующим образом:

$$A = \left[\frac{1}{K_i^2 + L_i^2 + H_i^2} + \frac{1}{(\alpha_K - 1)K_i(\alpha_K K_i - K_{i-1})} + \frac{1}{(\alpha_L - 1)L_i(\alpha_L L_i - L_{i-1})} + \frac{1}{(\alpha_H - 1)H_i(\alpha_H H_i - H_{i-1})} \right] (K_i - K_{i-1})(L_i - L_{i-1})(H_i - H_{i-1}) + 1,$$

$$B = \left[\frac{2}{K_i^2 + L_i^2 + H_i^2} + \frac{1}{(\alpha_K K_i - K_{i-1})(K_i - K_{i-1})} + \frac{1}{(\alpha_L L_i - L_{i-1})(L_i - L_{i-1})} + \frac{1}{(\alpha_H H_i - H_{i-1})(H_i - H_{i-1})} \right] (K_i - K_{i-1})(L_i - L_{i-1})(H_i - H_{i-1}) + 1,$$

$$C = \left[\frac{1}{K_i^2 + L_i^2 + H_i^2} + \frac{1}{(K_i - K_{i-1})(\alpha_K K_i - K_{i-1})} + \frac{1}{(L_i - L_{i-1})(\alpha_L L_i - L_{i-1})} + \frac{1}{(H_i - H_{i-1})(\alpha_H H_i - H_{i-1})} \right] (K_i - K_{i-1})(L_i - L_{i-1})(H_i - H_{i-1}),$$

где индекс i — номер года;

K_i — размер используемых основных фондов региона в i -м году, соответственно;

L_i ; H_i — размеры используемых и затраченных ресурсов труда и природных ископаемых в i -м году.

Коэффициенты α представляют собой коэффициенты роста:

$$\alpha_K = \frac{K_i}{K_{i-1}}, \quad \alpha_L = \frac{L_i}{L_{i-1}}, \quad \alpha_H = \frac{H_i}{H_{i-1}}.$$

Для верификации формулы проводилось моделирование валового регионального продукта в ряде регионов на основании исходных данных, приведенных Федеральной службой государственной статистики.

Для сравнения качества конечно-разностного аналога интегро-дифференциальной модели (ИДМ) были проведены расчеты по одному из алгоритмов авторегрессии — AR(2) с использованием уравнений Юла — Уокера [16]. Выбор модели определялся тем, что вариант ИДМ имеет такой же порядок. Это один из самых простых, но широко используемых алгоритмов.

На всех приведенных ниже рисунках ось абсцисс является временной осью, а ось ординат отражает значение ВРП в относительных единицах. На всех графиках статистические данные представлены сплошной линией, данные по AR(2)-алгоритму прерывистой линией с длинными штрихами,

значения, полученные по интегро-дифференциальной модели, обозначены прерывистой линией с короткими штрихами.

Проведенные расчеты показывают (рис. 1), что знание поведения основных факторов производства и валового регионального продукта за предыдущее два года позволяет довольно точно предсказывать поведение валового регионального продукта на следующий год. Однако из поведения кривых видно, что наибольшее несоответствие возникает в посткризисные периоды экономики. Это объясняется тем, что нет ясности, какой объем капитальных вложений будет сделан в развитие региона. Относительная ошибка составляла от 1 до 8 %, а в посткризисный период 17 %.

Алгоритм авторегрессии AR(2) показывает прогноз с большей относительной ошибкой во всех временных точках.

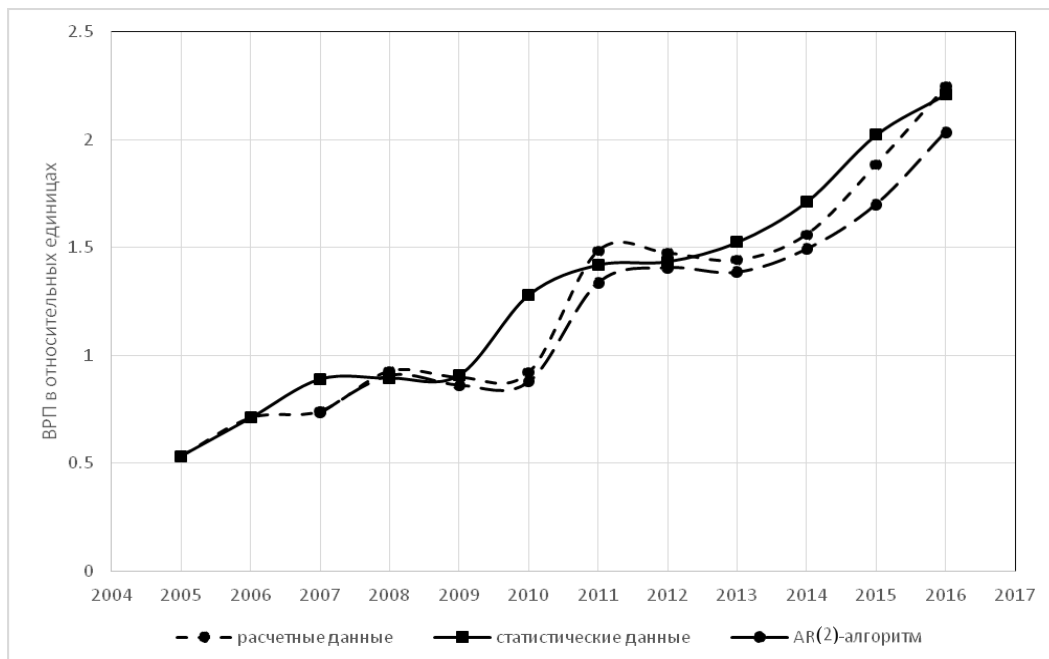


Рис. 1. Валовой региональный продукт Красноярского края
Gross regional product of the Krasnoyarsk Territory

Экономика Краснодарского края не имела ярко выраженного кризисного периода, поэтому предлагаемая модель обладает хорошими предсказательными свойствами (рис. 2). Тем не менее некоторый спад прироста ВРП в 2009 г. наблюдается, поэтому модель допускает ошибку при прогнозе следующего года. Относительная ошибка

предсказания в этот период времени составляло от 0,5 до 9,7 %.

Как и для Красноярского края, алгоритм авторегрессии AR(2) уступает в качестве прогноза ИДМ-процессу практически во всех временных точках.

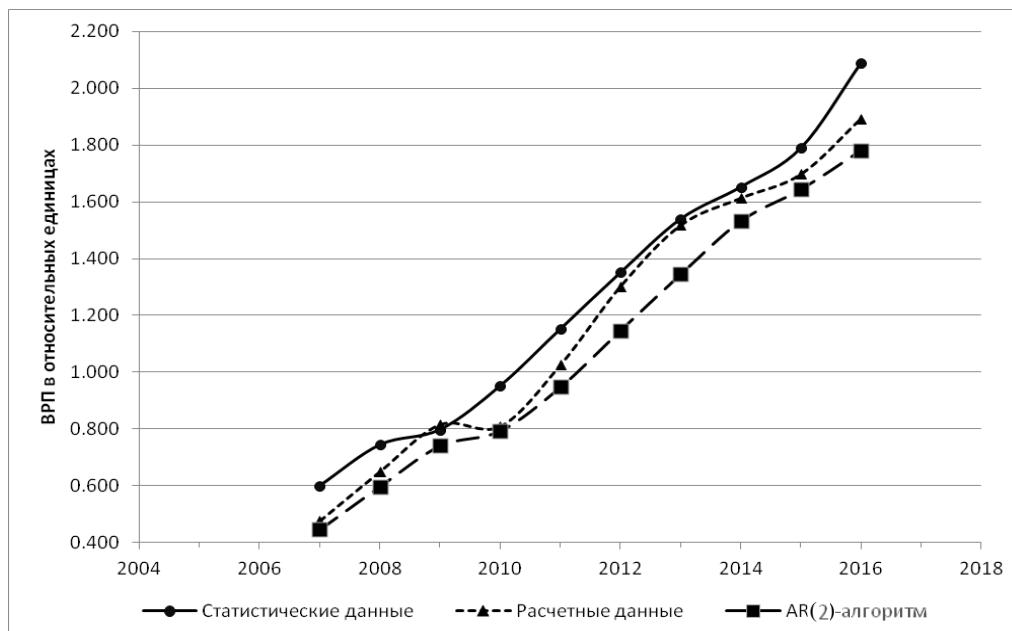


Рис. 2. Валовой региональный продукт Краснодарского края
Gross regional product of the Krasnodar Territory

В Новосибирской области падение ВРП в 2009 г. существенное, и модель не смогла «отловить провал» в объемах ВРП как во время кризиса, так и на следующий год (рис. 3). Из всех рассмотренных прогнозов в этом регионе оказалось наименее точное предсказание ВРП. Относительная ошибка расчетов составляла от 1 до 8 %, а в период кризиса и выхода из кризиса — до 18 %.

Алгоритм авторегрессии AR(2) для ВРП Новосибирской области в кризисный и посткризисный периоды дает схожие результаты с предлагаемым алгоритмом, а далее, в период поступательного развития экономики региона, начинает уступать по качеству прогноза интегро-дифференциальной модели.

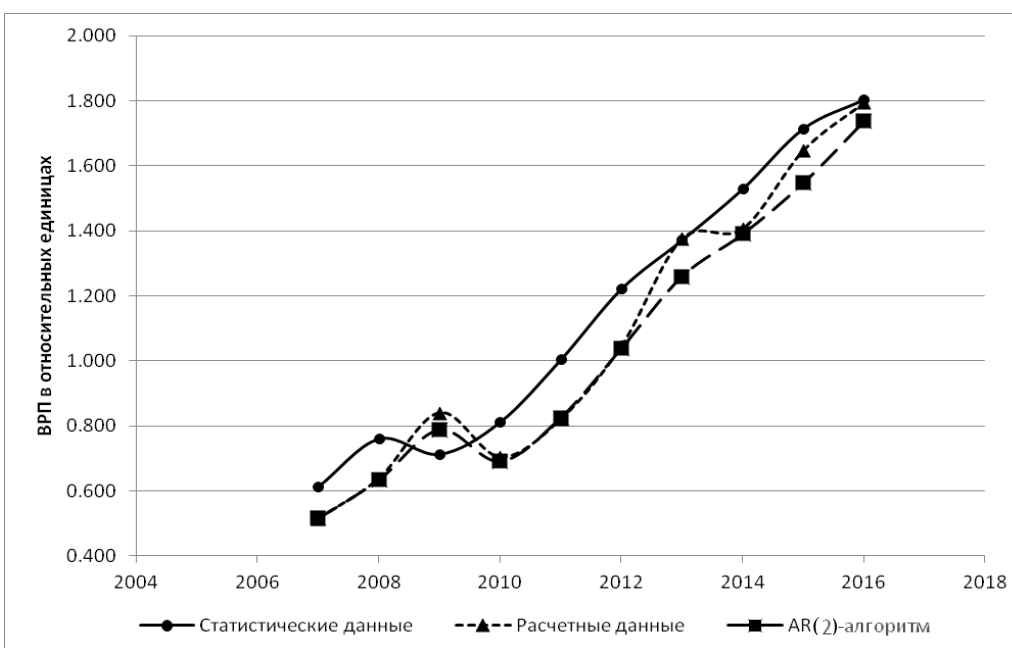


Рис. 3. Валовой региональный продукт Новосибирской области
Gross regional product of the Novosibirsk region

Для сравнения рассмотренных статистических моделей использовались два критерия: R/S критерий и критерий Стьюдента. Результаты расчетов, сведенных в табл. 1, показывают, что по соответствию ряда остатков нормальному закону распре-

деления рассмотренные модели практически идентичные. Из табл. 2 видно, что качественные показатели ИДМ превосходят аналогичные значения AR.

Таблица 1

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения ($\alpha = 5\%$)
Correspondence of a number of residues to the normal distribution law ($\alpha = 5\%$)

Регион	R/S — мин/макс	R/S для AR	AR-соответствие	R/S для ИДМ	ИДМ-соответствие
Красноярский край	2,80/3,91	3,16	ДА	3,11	ДА
Краснодарский край	2,80/3,91	3,83	ДА	2,84	ДА
Новосибирская область	2,80/3,91	3,43	ДА	3,30	ДА

Таблица 2

Проверка равенства нулю математического ожидания ($\alpha = 5\%$)
Checking if the mathematical expectation is equal to zero ($\alpha = 5\%$)

Регион	К-т Стьюдента критический	К-т Стьюдента для AR	AR-соответствие	К-т Стьюдента для модели	ИДМ-соответствие
Красноярский край	1,43	1,21	ДА	0,74	ДА
Краснодарский край	1,43	2,57	НЕТ	1,31	ДА
Новосибирская область	1,43	1,69	НЕТ	1,08	ДА

В табл. 3 представлены вычисленные значимости моделей по Фишеру и коэффициент детерминации, которые показывают возможность

применения интегро-дифференциальной модели на практике.

Таблица 3

Проверка статистической значимости
Checking statistical significance

Регион	AR			ИДМ		
	R^2	К-т Фишера	Значимость F	R^2	К-т Фишера	Значимость F
Красноярский край	0,92	117,6	$1,02 \cdot 10^{-5}$	0,95	34,9	$3,4 \cdot 10^{-4}$
Краснодарский край	0,95	196,9	$6,4 \cdot 10^{-7}$	0,89	97,3	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Новосибирская область	0,95	198,9	$6,2 \cdot 10^{-7}$	0,97	62,3	$6,5 \cdot 10^{-5}$

Выводы

Во всех рассмотренных случаях наблюдается некоторое несовпадение со статистическими данными в кризисные периоды, это может быть объяснено большим временным шагом (1 год). В случае месячного временного шага расхождение должно стать достаточно приемлемым, поскольку в предлагаемом приближении точность аппроксимации конечно-разностных схем для уравнений гиперболического типа $\sim o(h^2)$, где шаг h в нашем случае зависит от временного шага [17]. Рассмотренное уравнение (1) является уравнением с малым параметром, который также влияет на точность разностной схемы.

Отклонения расчетных данных с применением ИДМ от фактических объясняются следующим образом. В рассматриваемом периоде наблюдались кризисные явления в экономике, вызванные

воздействием факторов, не учитываемых моделью (политика, мировой финансовый кризис и пр.). При этом учитываемые факторы не испытывают столь резких колебаний, поэтому расчетные данные «запаздывают», но приближаются к фактическим по мере выхода на устойчивое развитие.

Описанная интегро-дифференциальная модель учитывает связь валового регионального продукта с основными факторами производства: основными фондами, трудовыми ресурсами и используемыми природными ресурсами. На базе интегро-дифференциального уравнения построена конечно-временная модель, которая показывает применимость результатов работы для краткосрочного прогнозирования валового регионального продукта.

Список источников

1. Алаев Э. Б. Региональное планирование в развивающихся странах / АН СССР, Совет по изучению производит. сил при Госплане СССР. М. : Наука, 1973. 216 с.
2. Баранов А. О., Павлов В. Н., Слепенкова Ю. М. Разработка динамической межотраслевой модели с блоком человеческого капитала // Мир экономики и упр.. 2017. Т. 17, № 1. С. 14—25.
3. Гранберг Г. А. Динамические модели народного хозяйства. М. : Экономика, 1985. 240 с.
4. Егоров Е. Г. Эффективность основных производственных фондов горной промышленности Северо-Востока СССР. М. : Наука, 1968. 134 с.
5. Леонтьев В. В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. М. : Изд-во полит. лит-ры, 1990. 416 с.
6. Минакир П. А. Экономическое развитие региона: программный подход. М. : Наука, 1983. 224 с.
7. Государственная экономическая политика / Т. Г. Морозова и др. ; под ред. проф. Т. Г. Морозовой. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. 256 с.
8. Некрасов Н. Н. Проблемы сибирского комплекса. Новосибирск : Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1973. 224 с.
9. Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. М. : Мысль, 1965. 478 с.
10. Эконометрия / В. И. Суслов, Н. М. Ибрагимов, Л. П. Талышева, А. А. Цыплаков ; под ред. Г. М. Мкртчяна. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2005. 744 с.
11. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А. М. Гатаулин, Г. В. Гаврилов, Т. М. Сорокина и др. ; под ред. А. М. Гатаулина. М. : Агропромиздат, 1990. 431 с.
12. Суспицын С. А. Методы и модели координации долгосрочных решений в системе «национальная экономика — регионы» / под ред. В. В. Кулешова ; ИЭОПП СО РАН. Новосибирск : Изд-во ИЭОПП СО РАН, 2017. 295 с.
13. Кузнецов С. Б. Динамика обновления факторов производства. Новосибирск : Сибпринт, 2010. 312 с.
14. Кузнецов С. Б., Кулигин Е. В. Интегро-дифференциальное моделирование валового продукта // Бизнес. Образование. Право. 2021. № 2 (55). С. 150—157. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.228.
15. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. : Наука, 1965. 423 с.
16. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 328 с.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 656 с.

References

1. Alaev Je.B. Regional'noe planirovanie v razvivajushhihsja stranah [Regional Planning in Developing Countries], AN SSSR, Sovet po izucheniju proizvodit. sil pri Gosplane SSSR. Moscow: Nauka, 1973, 216 p.
2. Baranov A.O., Pavlov V.N., Slepencova Ju.M. Razrabotka dinamicheskoj mezhotraslevoj modeli s blokom chelovecheskogo kapitala [Development of a dynamic inter-branch model with human capital block], *Mir jekonomiki i upravlenija* [The World of Economics and Management], 2017, vol. 17, no. 1, pp. 14—25.
3. Granberg G.A. Dinamicheskie modeli narodnogo hozjajstva [Dynamic models of the national economy]. Moscow: Jekonomika, 1985, 240 p.
4. Egorov E.G. Jefferktivnost' osnovnyh proizvodstvennyh fondov gornoj promyshlennosti Severo-Vostoka SSSR [Efficiency of Fixed Production Assets in the Mining Industry of the Northeast of the USSR]. Moscow: Nauka, 1968, 134 p.
5. Leont'ev V.V. Jekonomicheskie jesse. Teorii, issledovanija, fakty i politika [Economic Essays. Theories, Studies, Facts and Politics]. Moscow: Publ. politicheskoy literatury, 1990, 416 p.
6. Minakir P.A. Jekonomicheskoe razvitie regiona: programnyj podhod [Economic development of the region: a program approach]. Moscow: Nauka, 1983, 224 p.
7. Morozova T.G. et al. Gosudarstvennaja jekonomicheskaja politika [State economic policy]. Moscow: JuNITI-DANA, 2006, 256 p.
8. Nekrasov N.N. Problemy sibirskogo kompleksa [Problems of the Siberian Complex]. Novosibirsk: Zap.-Sib. kn. izd-vo, 1973, 224 p.
9. Nemchinov V.S. Jekonomiko-matematicheskie metody i modeli [Economic and mathematical methods and models]. Moscow: Mysl', 1965, 478 p.
10. Suslov V.I., Ibragimov N.M., Talysheva L.P., Cyplakov A.A. Jekonometrija [Econometrics], G.M. Mkrтчjana ed. Novosibirsk: Publ. SO RAN, 2005, 744 p.
11. Gataulin A.M., Gavrilov G.V., Sorokina T.M. et al. Matematicheskoe modelirovanie jekonomicheskikh processov v sel'skom hozjajstve [Mathematical modeling of economic processes in agriculture], A.M. Gataulina ed. Moscow: Agropromizdat, 1990, 431 p.
12. Suspicyun S.A. Metody i modeli koordinacii dolgosrochnyh reshenij v sisteme “nacional'naja jekonomika — region” [Methods and models for the coordination of long-term solutions in the system “national economy — regions”], V.V. Kuleshova ed., IJeOPP SO RAN. Novosibirsk: Publ. IJeOPP SO RAN, 2017, 295 p.
13. Kuznecov S.B. Dinamika obnovlenija faktorov proizvodstva [Dynamics of renewal of production factors]. Novosibirsk: Sibprint, 2010, 312 p.
14. Kuznecov S.B., Kuligin E.V. Integro-differencial'noe modelirovanie valovogo produkta [Integro-differential modeling of gross product], *Biznes. Obrazovanie. Pravo* [Business. Education. Law], 2021, no. 2 (55), pp. 150—157. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.228.
15. Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischislenija [Vector calculus and the beginnings of tensor calculus]. Moscow: Nauka, 1965, 423 p.
16. Kremer N.Sh., Putko B.A. Jekonometrika [Econometrics]. Moscow: JuNITI-DANA, 2012, 328 p.
17. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1977, 656 p.

Информация об авторах

Кузнецов Сергей Борисович — кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский институт управления — филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: kuznetsov-sb@ranepa.ru

Кулигин Евгений Вячеславович — кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский институт управления — филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: kuligin-ev@ranepa.ru

Information about the authors

Sergey B. Kuznetsov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Siberian Institute of Management — branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: kuznetsov-sb@ranepa.ru, 8-913-915-1413

Evgeny V. Kuligin — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Siberian Institute of Management — branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: kuligin-ev@ranepa.ru

Статья поступила в редакцию 08.03.2022; одобрена после рецензирования 22.04.2022; принята к публикации 08.05.2022.

The article was submitted 08.03.2022; approved after reviewing 22.04.2022; accepted for publication 08.05.2022.