ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ECONOMIC RESEARCH

Развитие территорий. 2023. № 2. С. 08—14.
Territory Development. 2023;(2):08—14.

Экономические исследования

Научная статья
УДК: 336.012.23
DOI: 10.32324/2412-8945-2023-2-08-14

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Валерий Андреевич Ермолаев[1], Александр Юрьевич Проскуряков[2]✉
[1, 2] Муромский институт (филиал) «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», Муром, Российская Федерация
Автор, ответственный за переписку: Александр Юрьевич Проскуряков, alexander.prosk.murom@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены проблемы моделирования процессов и систем экономики, поставлена задача оптимального управления, определены представляющая экономику система нелинейных дифференциальных уравнений и оптимизируемый целевой функционал; выбран вариационный метод решения поставленной задачи, описан принцип инвариантности нелинейных систем и предоставляемые им возможности моделирования динамических, в том числе экономических, систем. Дается критический анализ состояния в области экономического моделирования. Рассмотрены в терминах преобразования Лапласа, особенности и свойства принципа инвариантности линейных систем. Получены функции чувствительности нелинейных систем и определяющие их производные Гато и Фреше. Показано применение теории чувствительности в задачах оптимального управления нелинейными системами на примере достаточно простой задачи.

Ключевые слова: экономическая модель, вариационное исчисление, оптимальное управление, принцип инвариантности, чувствительность динамических систем

Для цитирования: Ермолаев В. А., Проскуряков А. Ю. Об инвариантности и чувствительности параметров математических моделей экономических систем // Развитие территорий. 2023. № 2. С. 08—14. DOI: 10.32324/2412-8945-2023-2-08-14.

Economic research

Original article

ON INVARIANCE AND SENSITIVITY OF PARAMETERS OF MATHEMATICAL MODELS OF ECONOMIC SYSTEMS

Valery A. Ermolaev[1], Alexander Yu. Proskuryakov[2]✉
[1, 2] Murom Institute (branch) “Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov”, Murom, Russian Federation
Corresponding author: Alexander Yu. Proskuryakov, alexander.prosk.murom@gmail.com

Abstract. The problems of modeling processes and systems of the economy are considered, the optimal control problem is posed, the system of nonlinear differential equations representing the economy and the optimized target functional are determined; a variational method for solving the problem is chosen, the principle of invariance of nonlinear systems and the possibilities provided by them for modeling dynamic, including economic, systems are described. A critical analysis of the state in the field of economic modeling is given. The features and properties of the invariance principle of linear systems are considered in terms of the Laplace transform. Sensitivity functions of nonlinear systems and Gato and Frechet derivatives defining them are obtained. The application of sensitivity theory in problems of optimal control of nonlinear systems is shown by the example of a fairly simple problem.

Keywords*:* economics model, calculus of variations, optimal control, invariance principle, sensitivity of dynamic systems

For citation: Ermolaev V.A., Proskuryakov A.Yu. On invariance and sensitivity of parameters of mathematical models of economic systems. *Territory Development*. 2023;(2):08—14. (In Russ.). DOI: 10.32324/2412-8945-2023-2-08-14.

Введение

По В. С. Владимирову [1], математическое моделирование основывается на уравнениях математической физики, уравнениях, как правило, имеющих однозначную физическую интерпретацию, что присуще, например, уравнениям, возникающим в задачах естествознания, техники и им подобных; уравнениям, достоверность которых подтверждается всем прошлым, теоретическим и эмпирическим, опытом.

Существенные, не математического характера, сложности возникают при постановке и рассмотрении задач экономического моделирования. Проблема заключается в том, что одно дело — это моделирование систем, подчиненных физически воспроизводимым законам природы, а другое — моделирование зависящих от человеческого фактора процессов, основанных только на субъективных представлениях о возможном поведении агентов экономической игры и состоятельности сведений, представленных разного рода таблицами и графиками. Тема возникающих в этой связи проблем поднимается, например, в работах [2 ; 3].

Комплексный характер проблем экономики [3] обусловливает потребность в декомпозиции ее обобщенной модели на ряд частных моделей, каждой из которых отвечает свой характерный процесс. Наиболее полными источниками сведений по моделированию подобных, в какой-то степени элементарных, процессов являются монографии [4 ; 5], посвященные, соответственно, задачам экономического роста и статистического анализа финансовых рядов. Рассматриваемые в [4] методы — это, по сути, аппарат теории дифференциальных уравнений, оптимизации, оптимального управления и др.

Проникновение в сферу экономики цифровых технологий порождает, при всех их потенциальных достоинствах, новые проблемы, обусловленные отсутствием в настоящее время надежно отработанных механизмов функционирования самой цифровой экономики. Одна из главных причин здесь заключена в отсутствии четкой связи цифровой экономики и цифровых денег с реальным производством [6 ; 7]; насколько эффективной в этом плане может явиться новая технология, как она повлияет на такие явления, как коррупция и протекционизм, — все зависит от правил, проработанности механизмов экономики [3], разумеется, — от исполнительности, а также, что особо подчеркивается Н. Н. Моисеевым, — от образованности, значение которой выражено в материалах «Программа учитель» [3].

Цифровая экономика сегодня — это модная тема, трактуемая часто как «четвертая промышленная революция» (автором термина является Клаус Шваб). Одноименная книга Шваба описывает, по сути, общеизвестные достижения и перспективы развития в области науки и техники. В целом создается впечатление, что в программу этой революции закладываются чисто финансовые интересы, игнорирующие интересы производителей конечной продукции и, что более опасно, эта программа претендует на создание новой идеологии, гарантирующей деньги и власть, все в соответствии с «Новым Органоном» Фрэнсиса Бэкона.

Упомянутый выше математический аппарат экономики, фактически — аппарат теории систем, может быть пополнен и так называемыми методами нелинейной динамики и регрессии [8 ; 9]. Задача моделирования экономических и финансовых циклов [10], имеющих, по сути, циклический, а не периодический характер, проявилась в методе усредненной оптимизации [11 ; 12]. Неопределенность, присущая экономике в силу многих человеческих факторов, обусловленных, например, социальными и психологическими причинами, может рассматриваться как возмущение, подлежащее либо полной, либо частичной компенсации.

При этом системы с полной или частичной компенсацией в части произвольных возмущений относят, соответственно, к классу абсолютно и ε-инвариантных. Принцип инвариантности и сопутствующая ему теория излагаются в [13—15]. Вариационный подход к решению задач инвариантности рассматривается в [16—18]. Полезным инструментом анализа зависимости характеристик компенсации от возмущений являются методы теории чувствительности [19—22]. Вариационный подход к рассмотрению задач инвариантности и чувствительности является целью настоящей работы.

Об инвариантности динамических систем

Одной из проблем экономических, как динамических, систем является проблема оптимального управления [13—15], состоящая в минимизации (максимизации) некоторого целевого функционала

$$J(x, v) \to \min, \tag{1а}$$

подчиненных системе дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, v, t),\ x(t_0) = x^0, \tag{1б}$$

где $f(x, v, t)$ — вектор-функция переменных $x(t) \in G_x \subset R^n$ и $v(t) \in G_v \subset R^r$, при этом $x(t)$ — вектор состояния системы, а $v(t)$ — вектор управляющих и/или возмущающих воздействий.

Вариационные методы решения задач Лагранжа, Майера и Больца, описываемые уравнениями вида (1а, б), рассматриваются, например, в [22]. При этом целевой функционал задачи Лагранжа имеет вид

$$J(x, v) = \int_{t_0}^{T} F(x, v, t)dt,$$

а функционал задачи Майера имеет вид

$$J(x, v) = \Phi\big(\hat{x}(t), t\big)_{t=T} = \Phi\big(\hat{x}(T), T\big).$$

Здесь нужно иметь в виду, что функция цели зависит не только от решения системы дифференциальных уравнений $\hat{x}(t)$ в момент $t = T$, но косвенно зависит и от возмущений $v(t)$.

Иная ситуация присуща инвариантным системам, т. е. системам, дифференциальные уравнения состояния которых имеют решения $\hat{x}(t)$, инвариантные по отношению к внешним воздействиям $v(t)$. Это означает, что аргументами целевого функционала являются как зависящее от внешних воздействий решение дифференциального уравнения системы, так и, в свою очередь, само внешнее воздействие $v(t)$:

$$J(t) = \Phi(\hat{x}(t), t).$$

На практике чаще всего встречаются функционалы

$$J(t) = \hat{x}_k(t),$$
$$J(t) = F(\hat{x}(t)),$$
$$J(t) = \int_0^T F(\hat{x}(t))dt.$$

Первые два функционала можно также представить выражением

$$J(t) = (c, \hat{x}(t)), \qquad (2)$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ — вектор коэффициентов скалярного произведения.

Из инвариантности функционала $J(t)$ относительно вектора воздействий v при заданном решении уравнения системы $\hat{x}(t)$ следует, что вариация функционала

$$\delta_t J(t) = 0.$$

Различают слабую и абсолютную инвариантность.

Если $\delta_t J(t) = 0$, только при $t = T$:

$$\delta_t J(t) = 0, \text{ если } t = T, \qquad (3а)$$

то инвариантность называется слабой. Если же

$$\delta_t J(t) = 0 \text{ при всех } t \in [0, T], \qquad (3б)$$

то инвариантность называется абсолютной.

Пусть определена функция

$$H(x, \psi, v, t) = (\psi, f_x),$$

где $\psi(t)$ — удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению $\dot{\psi} = -H_x$ с граничными условиями $\psi(t) = -c$. К тому же исходное уравнение (1б) принимает вид $\dot{x} = H_\psi$.

Подстановка решений этих уравнений в формулу, определяющую зависимость величины приращения функционала от вариации входного воздействия, дает выражение, позволяющее сделать вывод о выполнении условий инвариантности (3а, б):

$$\delta_t J(T) = (c, \delta x(T)) =$$
$$= -\int_{t_0}^{T} [H(x, \psi, v + \delta v, t) - H(x, \psi, v, t)]dt - \eta.$$

Здесь η — некоторое остаточное слагаемое.

Если, как пример, рассмотреть в соответствии с [16 ; 17] линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

то из приведенных выше уравнений следует решение

$$\delta_t J(T) = -\int_0^T (\psi, b)\delta v dt, \quad \dot{\psi} = -A^T\psi, \quad \psi(T) = -c.$$

В работах [16—18] методами вариационного исчисления получено решение и частных проблем инвариантности линейных систем, стационарных и нестационарных, а в ряде случаев также нелинейных. Названные методы имеют, конечно, более широкий круг применений, в который, например, входит теория оптимального управления [22].

В задачах анализа и синтеза многосвязных и многоканальных систем автоматического управления, характеризуемых вход-выходными параметрами и соотношениями, соответствующими передаточными функциями и топологией соединений, проблема инвариантности рассматривается по-иному [13—15]. В частности, например, инвариантность переменной x_i линейной системы относительно возмущения $v_j, j \neq i$ означает отсутствие ее зависимости от v_j и указывает на то, что передаточная функция $W_{ij}(s)$ названной зависимости, определяемая равенством

$$\delta\tilde{x}_i(s) = W_{ij}(s)\delta\tilde{v}_j(s),$$

тождественно принимает нулевое значение (знак тильды означает преобразование Лапласа).

В случае передаточной функции, например, вида

$$W_{ij}(s) = \frac{P_i(s)R_j(s) - P_j(s)R_i(s)}{Q_i(s) + Q_j(j)}$$

критерием инвариантности является равенство $P_i(s)R_j(s) - P_j(s)R_i(s) = 0$. Конечно, сама передаточная функция должна удовлетворять условиям физической реализуемости.

Принцип инвариантности, явно или неявно, применим ко многим многосвязным и многоконтурным системам из области практической деятельности человека; присущ он и системам из области экономики. В некотором смысле этот принцип привносит свободу в выбор топологии структурных схем управления ресурсами разной природы. В экономике — это сырье, власть, деньги и идеология.

Ресурс x_i называется инвариантным по отношению к входу v_j тогда и только тогда, когда $x_i = W_{ii}(s)\delta_{ij}v_j$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Если же $x_i = W_{ij}(s)\varepsilon_{ij}v_j$, то говорят об ε-инвариантности. Аналогично говорят об ε-инвариантности, если вариация функционала (3) удовлетворяет условию $\delta_r J(t) = \varepsilon \neq 0$.

К сожалению или счастью, инвариантность не всегда реализуема или целесообразна; инвариантность, например, может означать подчиненность того или иного ресурса избранной группе субъектов, задающей, в частности, правила обращения цифровых денег или обладающей возможностью доступа по меньшей мере к ключевым ресурсам конкурентной игры; ресурсам, имеющим денежное и/или информационное содержание.

Анализ чувствительности динамических систем

Чувствительность, как известно, означает зависимость некоторых характеристик динамической (экономической) системы или электрической цепи от ее изменяющихся в окрестности номинальных значений параметров. Многообразие методов теории систем [19] привело к появлению разных характеристик чувствительности, характеристик временных и частотных, логарифмических и полулогарифмических, непрерывных и разрывных, параметрических и др.

Ниже определяются функции чувствительности, представленные частными производными, производными Гато и Фреше, основанными на идеях дифференциального исчисления в нормированных пространствах [23 ; 24] или, в общих чертах, нелинейного анализа [25]. Приложения теории чувствительности к теории автоматического управления рассматриваются в [15 ; 21 ; 26].

Функциональными характеристиками чувствительности являются, как известно, дифференциалы и соответствующие им производные Гато и Фреше. Дифференциал Гато отображения $f : X \to Y$ в точке $\hat{x}$ задается выражением

$$Df(\hat{x}, h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda}.$$

Если при этом дифференциал Гато линеен по h, т. е. $DF(\hat{x}, h) = Ah$, так, что

$$\lim_{\lambda \to 0} (1/\lambda) \| f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) - \lambda A h \| = 0,$$

то оператор $A = f'_x(\hat{x})$ называется производной Гато.

Пусть отображение $f : Q \subset R^m \to R^n$, тогда производная Гато дается матрицей Якоби:

$$f'_x = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_m f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \cdots & \partial_m f_n \end{pmatrix}, \ \partial_j f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

В ряде случаев проще при анализе чувствительности воспользоваться дифференцированием по Фреше. Отображение $f : Q \subset R^m \to R^n$ считается при этом дифференцируемым по Фреше, если существует линейный оператор A такой, что

$$\lim_{h \to 0} (1/\|h\|) \| f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) - Ah \| = 0.$$

Оператор A при этом — это производная Фреше отображения f, т. е. $A = f'_x(\hat{x})$, из существования которой следует и существование производной Гато, но не обязательно обратно. В подобной ситуации, когда производные Гато и Фреше фактически совпадают, естественно использовать для них единое обозначение, что, как правило, и делается. Как пример теории далее можно рассмотреть задачу идентификации динамической системы [15].

Цель рассматриваемой задачи идентификации состоит в оценке вектора неизвестных параметров $\alpha \in R^r$ системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha), \ x^* = x(t_0) \tag{4}$$

и линейным алгебраическим уравнением — уравнением выхода системы:

$$z(\tau) = H(\tau)x(\tau). \tag{5}$$

Здесь $f(t, x(t), \alpha)$ — вектор-функция состояния $x(t) \in G_x \subset R^m$, $z(\tau)$ — наблюдаемые данные, $H(\tau)$ — матрица коэффициентов размера $m \times n$ и x^* — начальные условия.

Решению уравнения (4) при известном векторе $\alpha = \alpha^* + \delta\alpha$ можно также придать вид

$$x(\tau, \alpha) \cong x(\tau, \alpha^*) + x'_\alpha(\tau, \alpha^*)\delta\alpha, \tag{6}$$

где $x(\tau, \alpha^*)$ — решение уравнения (4) при значении $\alpha = \alpha^*$.

Подстановка выражения (6) в (4) дает матричное уравнение

$$\dot{x}'_\alpha(\tau, \alpha^*) \cong f'_x(\tau, x(\tau, \alpha^*), \alpha^*) x'_\alpha(\tau, \alpha^*) + \\ + f'_\alpha(\tau, x(\tau, \alpha^*), \alpha^*), \ x'_\alpha(t_0, \alpha^*) = 0. \tag{7}$$

Интегрирование этого уравнения дает матрицу функций чувствительности.

Поскольку выход системы определяется согласно (5) и (6) выражением

$$\hat{z}(\tau) = H(\tau)x(\tau, \alpha^*) + H(\tau)x'_\alpha(\tau, \alpha^*)\delta\alpha,$$

то, естественно, требуется, чтобы искомый вектор параметров α^* удовлетворял условиям наилучшего приближения, т. е. обеспечивал минимальное значение функционала

$$Q(\delta\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \left\| \hat{z}(t_k) - z(t_k) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left\| H(t_k) x(t_k, \alpha^*) + H(t_k) x'_\alpha(t_k, \alpha^*) \delta\alpha - z(t_k) \right\|^2 \to \min .$$

Более полные сведения по решению этой задачи можно найти в [15].

Полученные выше результаты, касающиеся методов анализа динамических систем, требуют в целях практической реализации конкретизации как структуры, так и параметров представляющих их уравнений. Особые проблемы связаны с моделированием экономических систем, характеризующихся значительной неопределенностью возмущающих воздействий и динамики возможных процессов, а также воздействий и процессов социал-экономического или экономического типа, находящихся под контролем их участников.

Особый класс процессов образуют экономические и деловые циклы, представляемые периодическими, но нерегулярными колебаниями, происходящими в окрестности соответствующих долгосрочных трендов развития экономики [10]. К этому же классу можно отнести циклические и квазициклические процессы [12].

Конечно, многие нерегулярные процессы можно на конечном интервале приблизить посредством решения систем дифференциальных уравнений, подобных уравнениям генератора экономических циклов [10] — формирователя хаотических колебаний. Однако подобные приближения представляют лишь внешнюю форму моделируемых явлений, не касаясь внутреннего содержания и не раскрывая роли человеческого фактора. Последнее следует как из однотипности используемых моделей, так и из проблемы выбора их параметров.

Уже давно отмечено, что актуальными являются «общие экономические проблемы концептуального характера, а не решение отдельных оптимизационных задач» (Н. Н. Моисеев). Однако особого продвижения в этом направлении не наблюдается, не считая идеи построения макроскопической, по аналогии с физикой твердого тела, модели экономики [27 ; 28].

Заключение

Предсказанная еще Леонардо да Винчи общая тенденция математизации науки (см. раздел «Об истинной и ложной науке» в академическом издании его трудов) затрагивает, естественно, и науку экономическую. Математические модели экономики, построение которых осложнено множеством привходящих факторов, мало отличаются от простых (в принципе, однотипных) моделей технических, экологических и эволюционных систем, систем оптимального управления и даже искусственных нейронных сетей. Представленный в настоящей работе материал имеет целью привлечь внимание исследователей к возможностям использования принципов инвариантности в задачах моделирования, методам анализа чувствительности, а также к задачам декомпозиции систем и сопутствующим преобразованиям систем дифференциальных уравнений.

Список источников

1. *Владимиров В. С.* Что такое математическая физика? Препринт / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. М. : МИАН, 2006. 20 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. М. : Наука, 1979.
3. *Моисеев Н. Н.* Избранные труды : в 2 т. М. : Тайдекс КО, 2003.
4. *Асемоглу Д.* Введение в теорию современного экономического роста : в 2 кн. М. : Дело : РАНХиГС, 2018.
5. *Tsay R. S.* Analysis of financial time series. Hoboken. New Jersey : John Wiley & Sons, 2010.
6. *Иванов В. В., Малинецкий Г. Г.* Цифровая экономика: мифы, реальность, перспективы. М. : РАН, 2017.
7. *Ларина О. И., Акимов О. М.* Цифровые деньги на современном этапе: ключевые риски и направления развития // Финансы: теория и практика. 2020. Т. 24, № 4. С. 18—30.
8. *Полунин Ю. А.* Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления. 2019. № 1. С. 32—44.
9. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация / Д. Л. Андрианов, В. О. Арбузов, С. В. Ивлиев и др. // Вестник Пермского университета. Экономика. 2015. № 4 (27). С. 8—32.
10. *Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 127—138.
11. *Цирлин А. М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. М. : Наука, 1997.
12. *Цирлин А. М.* Задачи и методы усредненной оптимизации // Труды МИАН. 2008. Т. 261. С. 276—292.
13. *Техническая* кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования / под ред. В. В. Солодовникова. М. : Машиностроение, 1967.
14. *Современные* методы проектирования систем автоматического управления. Анализ и синтез / под общ. ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчеева. М. : Машиностроение, 1967.
15. *Петров Б. Н.* Избранные труды. Т. 1. Теория автоматического управления. М. : Наука, 1983.
16. *Розоноэр Л. И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. I // АиТ. 1963. № 6. С. 744—756.
17. *Розоноэр Л. И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. II // АиТ. 1963. № 7. С. 861—670.

18. *Величенко В. В.* О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем // АиТ. 1972. № 4. С. 22—35.
19. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. М. : Наука, 1981.
20. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. М. : Советское радио, 1972.
21. *Чувствительность* автоматических систем: труды Международного симпозиума по чувствительным системам автоматического управления (Дубровник, сентябрь 1964) / отв. ред. Я. З. Цыпкина. М. : Наука, 1968.
22. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М. : ЛЕНАНД, 2020.
23. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2007.
24. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М. : Мир, 1975.
25. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М. : Мир, 1988.
26. *Special* issue on sensitivity // Journal of the Franklin Institute, 1981, Vol. 312, no. 3—4, p. 141—216.
27. *Цирлин А. М., Саламон П., Хоффман К. Х.* Замена переменных состояния в задачах параметрического управления осцилляторами // АиТ. 2011. № 8. С. 53—64.
28. Оптимальные процессы для управляемых осцилляторов / Б. Андресен, П. Саламон, К. Х. Хоффман, А. М. Цирлин // АиТ. 2018. № 12. С. 3—15.

References

1. Vladimirov V.S. Chto takoe matematicheskaya fizika? Preprint [What is mathematical physics?]. Moscow, MIAN, 2006, 20 p.
2. Moiseev N.N. Matematika stavit eksperiment [Mathematics puts the experiment]. Moscow, Nauka, 1979.
3. Moiseev N.N. Izbrannye trudy [Selected Works], v 2 t. Moscow, Taideks KO, 2003.
4. Asemoglu D. Vvedenie v teoriyu sovremennogo ekonomicheskogo rosta [Introduction to the theory of modern economic growth], v 2 kn. Moscow, Delo, RANKhiGS, 2018.
5. Tsay R.S. Analysis of financial time series. Hoboken. New Jersey, John Wiley & Sons, 2010.
6. Ivanov V.V., Malinetskii G.G. Tsifrovaya ekonomika: mify, real'nost', perspektivy [Digital economy: myths, reality, prospects]. Moscow, RAN, 2017.
7. Larina O.I., Akimov O.M. Tsifrovye den'gi na sovremennom etape: klyuchevye riski i napravleniya razvitiya [Digital money at the present stage: key risks and directions of development], *Finansy: teoriya i praktika [Finance: theory and practice]*, 2020, vol. 24, no. 4, pp. 18—30.
8. Polunin Yu.A. Sintez metodov nelineinoi dinamiki i regressionnogo analiza dlya issledovaniya sotsial'no-ekonomicheskikh protsessov [Synthesis of nonlinear dynamics and regression analysis methods for the study of socio-economic processes], *Problemy upravleniya [Problems of management],* 2019, no. 1, pp. 32—44.
9. Andrianov D.L., Arbuzov V.O., Ivliev S.V. et all. Dinamicheskie modeli ekonomiki: teoriya, prilozheniya, programmnaya realizatsiya [Dynamic models of the economy: theory, applications, software implementation], *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika [Vestnik (Herald) of Perm University. Economics],* 2015, no. 4 (27), pp. 8—32.
10. Matrosov V.V., Shalfeev V.D. Modelirovanie ekonomicheskikh i finansovykh tsiklov: generatsiya i sinkhronizatsiya [Modeling economic and financial cycles: generation and synchronization], *Izvestiya vuzov. PND [Izvestia of Higher Education Institutions],* 2021, vol. 29, no. 4, pp. 127—138.
11. Tsirlin A.M. Metody usrednennoi optimizatsii i ikh prilozheniya [Methods of averaged optimization and their applications]. Moscow, Nauka, 1997.
12. Tsirlin A.M. Zadachi i metody usrednennoi optimizatsii [Problems and methods of averaged optimization], *Trudy MIAN [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics(MIAN)]*, 2008, vol. 261, pp. 276—292.
13. Solodovnikova V.V. (ed.) Tekhnicheskaya kibernetika. Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya. Kniga 2. Analiz i sintez lineinykh nepreryvnykh i diskretnykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Technical cybernetics. Theory of automatic regulation. Book 2. Analysis and synthesis of linear continuous and discrete automatic control systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1967.
14. Petrova B.N., Solodovnikova V.V., Topcheeva Yu.I. (eds.) Sovremennye metody proektirovaniya sistem avtomaticheskogo upravleniya. Analiz i sintez [Modern methods of designing automatic control systems. Analysis and synthesis]. Moscow, Mashinostroenie, 1967.
15. Petrov B.N. Izbrannye Trudy [Selected Works], vol. 1. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Selected Works. T. 1. Theory of automatic control]. Moscow, Nauka, 1983.
16. Rozonoer L.I. Variatsionnyi podkhod k probleme in-variantnosti sistem avtomaticheskogo upravleniya [The variational approach to the problem of invariance of automatic control systems]. I, *AiT [Automatics and Telemechanics],* 1963, no. 6, pp. 744—756.
17. Rozonoer L.I. Variatsionnyi podkhod k probleme invariantnosti sistem avtomaticheskogo upravleniya [The variational approach to the problem of invariance of automatic control systems]. II, *AiT [Automatics and Telemechanics],* 1963, no. 7, pp. 861—670.
18. Velichenko V.V. O variatsionnom metode v probleme invariantnosti upravlyaemykh system [On the variational method in the problem of invariance of controllable systems], *AiT [Automatics and Telemechanics]*, 1972, no. 4, pp. 22—35.
19. Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya [Sensitivity of control systems]. Moscow, Nauka, 1981.
20. Tomovich R., Vukobratovich M. Obshchaya teoriya chuvstvitel'nosti [General theory of sensitivity]. Moscow, Sovetskoe radio, 1972.
21. Tsypkina Ya.Z. (ed.) Chuvstvitel'nost' avtomaticheskikh sistem: trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po chuvstvitel'nym sistemam avtomaticheskogo upravleniya (Dubrovnik, sentyabr' 1964.) [Sensitivity of automatic systems: proceedings of the International symposium on sensitive automatic control systems]. Moscow, Nauka, 1968.
22. Moiseev N.N. Chislennye metody v teorii optimal'nykh system [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, LENAND, 2020.
23. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow, Fizmatlit, 2007.

24. Ortega Dzh., Reinboldt V. Iteratsionnye metody resheniya nelineinykh sistem uravnenii so mnogimi neizvestnymi [Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns]. Moscow, Mir, 1975.
25. Oben Zh.-P., Ekland I. Prikladnoi nelineinyi analiz [Applied non-linear analysis]. Moscow, Mir, 1988.
26. Special issue on sensitivity, *Journal of the Franklin Institute*, 1981, vol. 312, no. 3—4, pp. 141—216.
27. Tsirlin A.M., Salamon P., Khoffman K.Kh. Zamena peremennykh sostoyaniya v zadachakh parametricheskogo upravleniya ostsillyatorami [Substitution of state variables in parametric oscillator control problems], *AiT [Automatics and Telemechanics]*, 2011, no. 8, pp. 53—64.
28. Andresen B., Salamon P., Khoffman K.Kh., Tsirlin A.M. Optimal'nye protsessy dlya upravlyaemykh ostsillyatorov [Optimal processes for controlled oscillators], *AiT [Automatics and Telemechanics],* 2018, no. 12, pp. 3—15.

Информация об авторах

Ермолаев Валерий Андреевич — кандидат технических наук, доцент кафедры электроники и вычислительной техники, Муромский институт (филиал) «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», Муром, Российская Федерация. E-mail: valeermolaev@yandex.ru

Проскуряков Александр Юрьевич — кандидат технических наук, доцент кафедры электроники и вычислительной техники, Муромский институт (филиал) «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», Муром, Российская Федерация. E-mail: alexander.prosk.murom@gmail.com

Information about the authors

Valery A. Ermolaev — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Electronics and Computer Engineering, Murom Institute (branch) “Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov”, Murom, Russian Federation. E-mail: valeermolaev@yandex.ru

Alexander Y. Proskuryakov — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Electronics and Computer Engineering, Murom Institute (branch) “Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov”, Murom, Russian Federation. E-mail: alexander.prosk.murom@gmail.com

Статья поступила в редакцию 30.03.2023; одобрена после рецензирования 07.05.2023; принята к публикации 22.05.2023.

The article was submitted 30.03.2023; approved after reviewing 07.05.2023; accepted for publication 22.05.2023.