

НАУЧНЫЙ ПОИСК И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

SCIENTIFIC SEARCH AND OFFERS

Развитие территорий. 2026. № 2. С. 78—94.

Territory Development. 2026;(2):78—94.

Научный поиск и предложения

Научная статья
УДК 502.17(1/9)
EDN VUGPPL

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ КУРСОВ И УСПЕВАЕМОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПОСРЕДСТВОМ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

Егор Владимирович Ефремов¹, Артем Васильевич Логачев^{2✉}, Виталина Игоревна Никитина³, Евгений Игоревич Прокопенко⁴, Мария Дмитриевна Токарева⁵

^{1, 2, 3, 4} Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

⁵ Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация

Автор, ответственный за переписку: Артем Васильевич Логачев, omboldovskaya@mail.ru

Аннотация. В статье предлагается подход к совместной оценке сложности учебных курсов и успеваемости обучающихся на основе байесовских сетей. В отличие от традиционных методов, основанных исключительно на среднем балле или количестве зачетных единиц, данный подход учитывает как объективные, так и субъективные факторы, влияющие на уровень сложности курса и индивидуальные результаты студентов. Использование байесовских методов позволяет интегрировать априорную информацию (например, результаты вступительных испытаний или исторические данные по курсу) и обновлять оценки на основе наблюдаемых результатов обучения, обеспечивая прозрачность и интерпретируемость выводов. Метод не только способствует более справедливому ранжированию обучающихся с учетом сложности пройденных дисциплин, но и выявляет особенности преподавания, связанные с конкретными преподавателями или учебными заведениями, что может быть полезно для анализа качества образовательного процесса и его последующей оптимизации.

Ключевые слова: байесовские сети, успеваемость обучающихся, сложность учебного курса, вероятностное моделирование, ранжирование студентов

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-348.

Для цитирования: Ефремов Е. В., Логачев А. В., Никитина В. И., Прокопенко Е. И., Токарева М. Д. Оценка сложности курсов и успеваемости обучающихся посредством байесовских сетей // Развитие территорий. 2026. № 2. С. 78—94. EDN VUGPPL.

Scientific search and offers

Original article

ASSESSING COURSE DIFFICULTY AND STUDENT PERFORMANCE USING BAYESIAN NETWORKS

Egor V. Efremov¹, Artem V. Logachev^{2✉}, Vitalina I. Nikitina³, Evgeny I. Prokopenko⁴, Maria D. Tokareva⁵

^{1, 2, 3, 4} Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

⁵ Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russian Federation

Corresponding author: Artem V. Logachev, omboldovskaya@mail.ru

© Ефремов Е. В., Логачев А. В., Никитина В. И., Прокопенко Е. И., Токарева М. Д., 2026



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. This article proposes an approach to jointly assessing course difficulty and student performance based on Bayesian networks. Unlike traditional methods based solely on GPA or the number of credits, this approach takes into account both objective and subjective factors influencing course difficulty and individual student performance. Using Bayesian methods allows for the integration of prior information (e.g., placement test results or historical course data) and updating assessments based on observed learning outcomes, ensuring transparency and interpretability of findings. This method not only facilitates a more equitable ranking of students based on the difficulty of the courses they complete but also identifies teaching characteristics associated with specific instructors or educational institutions, which can be useful for analyzing the quality of the educational process and its subsequent optimization.

Keywords: Bayesian networks, student performance, course difficulty, probabilistic modeling, student ranking

Acknowledgements: Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2025-348 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Efremov E.V., Logachev A.V., Nikitina V.I., Prokopenko E.I., Tokareva M.D. Assessing Course Difficulty and Student Performance Using Bayesian Networks. *Territory Development*. 2026;(2):78—94. (In Russ.). <https://elibrary.ru/vugppl>.

Введение

Параллельная объективная оценка сложности курсов и успеваемости учащихся важна как для улучшения образовательного процесса, так и для правильного определения уровня усвоения материала и ранжирования обучающихся. Традиционно при составлении учебной программы учитываются только взаимосвязи между изучаемыми дисциплинами (т. е. выделяются классы дисциплин, в каждом из которых четко определен порядок их изучения) и так называемое количество зачетных единиц (т. е. количество часов, необходимых для усвоения дисциплины). Что касается общей оценки успеваемости или ранжирования обучающихся, то традиционно используется средний балл или количество успешно завершённых курсов [1—3]. Однако при составлении учебной программы и при мониторинге успеваемости чаще всего никак не учитывается сложность изучаемого материала (возможно, лишь количество зачетных единиц косвенно связано со сложностью дисциплины).

Одним из способов объективной оценки уровня специалиста является собеседование с группой экспертов. Однако такой способ ранжирования требует значительных временных и финансовых затрат. Ясно, что чем сложнее пройденный курс, тем больше должна быть его значимость при градации специалистов, успешно завершивших обучение. Отметим, что если обучение проходит на онлайн-платформе, то итоговая градация происходит автоматически, после завершения курса, с помощью среднего балла (реже — взвешенного среднего балла, учитывающего только количество зачетных единиц и вид итогового контроля), что никак не учитывает сложность пройденных курсов [4]. На онлайн-платформах эта проблема усугубляется еще и тем, что будущие специалисты различных профилей часто осваивают одни и те же курсы. В частности, школьную дис-

циплину «биология» изучают и генетики, и стоматологи, однако степень ее значимости для этих профессий существенно различается: для генетика биологические знания носят фундаментальный и незаменимый характер, для стоматолога они являются вспомогательными и второстепенными.

Таким образом, определение сложности изучаемой дисциплины является важной задачей как для составления учебной программы и выбора последовательности, в соответствии с которой будут изучаться дисциплины, так и для ранжирования обучающихся. При этом совершенно нетривиальным является ответ на вопрос, как определить сложность курса. Очевидно, что чем больше (меньше) обучающихся сдали курс, тем он проще (сложнее). То есть мы приходим к выводу, что сложность курса напрямую связана с количеством обучающихся, успешно его завершивших. Этот факт, скорее всего, сможет уловить нейронная сеть, но методы, основанные на нейронных сетях, не позволяют ответить на вопрос о том, почему конкретный обучающийся не освоил курс или освоил курс с той или иной оценкой. Нейронная сеть, по сути, является «черным ящиком»: ее выводы — это оптимизация некоторой функции полезности по некоторым параметрам, что значительно затрудняет объяснение результатов ее применения.

В настоящей работе применяются байесовские методы построения оценок уровней сложности курсов и успеваемости обучающихся. При этом предполагается, что может быть использована априорная информация об уровнях успеваемости обучающихся (на практике это могут быть, например, шкалированные результаты ЕГЭ, вступительных экзаменов или результаты экзаменов предыдущих сессий и т. д.) и сложностях курсов (на практике это может быть, например, информация о сложности, полученная по прошлым периодам или по другим учебным за-

ведениям, где изучается этот же курс), а основной задачей является поиск апостериорных справедливых оценок уровней сложности курса и успеваемости обучающихся. Наш метод, хотя и использует методы оптимизации (связанные с корректировкой оценок), но позволяет сделать четкие выводы о связи между оценками успеваемости студентов и сложностью курса. Отметим, что кроме объективной сложности изучаемой дисциплины (объем материала, трудность его восприятия, количество часов на самостоятельное изучение, количество проверочных работ), есть еще субъективная сложность, связанная с уровнем начальной подготовки обучающихся, а также квалификацией и специфическими требованиями конкретного преподавателя в рамках курса. Наш метод, в частности, способен выявить и эту субъективную сложность. Например, если в двух вузах с приблизительно одинаковыми априорными оценками успеваемости студентов после корректировки оценок один и тот же курс будет иметь значимо разные оценки сложности, то этот факт, скорее всего, будет говорить об индивидуальных особенностях преподавания дисциплины. Такое выявление субъективной сложности может отчасти заменить анонимное оценивание студентами преподавателя.

Работа организована следующим образом: в разделе 1 представлен обзор существующих подходов и релевантной литературы; в разделе 2 предложена математическая модель и сформулирован основной алгоритм; раздел 3 посвящен практическому применению разработанного метода на примере ранжирования школьников, а также его сравнению с классическими подходами к оцениванию. В разделе А приложения сформулированы и доказаны ключевые теоретические свойства получаемых оценок, в разделе Б приложения описан алгоритм ранжирования школьников по направлениям подготовки в вузе.

1. Обзор литературы

В условиях растущего интереса к адаптивному обучению и развитию систем персонализированных предложений важно понимать, какие методы и технологии применяются для рекомендаций курсов, направлений, а также при построении учебного процесса. Отметим, что модели подбора образовательных траекторий опираются на данные о студентах, их академических предпочтениях и успеваемости, что позволяет предлагать наиболее релевантные образовательные программы. В этом

разделе рассмотрим современные работы, посвященные методам формирования курсов, входящих в учебную программу, оптимизации учебного процесса, а также улучшению качества преподавания, повышению успеваемости обучающихся и способам получения информации, связанной с учебным процессом.

В исследовании [5] используются алгоритмы машинного обучения для прогнозирования академической успеваемости (GPA) студентов. Авторы сравнивают эффективность четырех классификаторов (байесовская сеть, алгоритм C 4.5, лес принятия решений и дерево наивного байесовского классификатора (NBTree)), которые на основе академической истории позволяют делить студентов по уровню GPA на три категории (высокий, средний и низкий), а также своевременно выявить студентов группы риска. Полученная классификация применяется при формировании оптимальной последовательности изучения дисциплин для ИТ-направлений с учетом индивидуальной академической истории.

Отметим, что ранее аналогичная задача решалась той же группой авторов (в расширенном составе) с использованием модели, основанной на байесовских сетях [6].

Исследования [7] посвящены разработке алгоритма построения оптимальной последовательности освоения учебных дисциплин. Авторы учитывают сложность дисциплин, трудоемкость их изучения, иерархическую зависимость между ними (т. е. ограничения на допустимую последовательность освоения), а также общее количество семестров, выделяемых на весь курс обучения. Основная задача состоит в распределении дисциплин по семестрам таким образом, чтобы учебная нагрузка была распределена равномерно, т. е. суммарное количество учебных часов и совокупная сложность дисциплин в каждом семестре были сбалансированы. Для решения этой задачи авторы применяют известные алгоритмы, включая алгоритм максимального веса предварительных условий (MPW), алгоритм аппроксимации сложности (DA) и адаптивный генетический алгоритм (AGA), и сравнивают их эффективность. При этом предполагается, что сложность каждой дисциплины известна заранее; вопрос ее объективной оценки в исследовании не рассматривается.

Вопросам оценки сложности заданий на образовательных курсах посвящена статья [8]. В ней рассматривается подход, основанный на таксономии Блума, которая разделяет

когнитивные цели обучения на шесть уровней — от простых к сложным: знание (Knowledge), понимание (Comprehension), применение (Application), анализ (Analysis), синтез (Synthesis) и оценка (Evaluation). Такой подход позволяет классифицировать уровень сложности вопросов и заданий в контрольных материалах. Каждому заданию ставится в соответствие один из уровней таксономии на основе глаголов, используемых в его формулировке: например, «назови» — знание, «рассчитай» — применение, «спроектируй» — синтез. В настоящей работе таксономия Блума не применяется для оценки сложности дисциплин, поскольку ее использование требует детального анализа рабочих программ и фондов оценочных средств по каждой дисциплине.

Рассмотрим исследования, посвященные анализу, оценке академической успеваемости и прогнозированию результатов обучения. Корректная оценка успеваемости играет ключевую роль в формировании персонализированных рекомендаций по выбору образовательных траекторий. В работе [9] предложена модель оценивания знаний студентов на основе нечеткой логики. Подход учитывает такие характеристики экзаменационных заданий, как сложность, значимость и трудоемкость выполнения. В отличие от традиционных методов, основанных исключительно на количестве верных ответов, система анализирует факторы и выдает более точную оценку, что позволяет повысить объективность и дифференцирующую способность итогового результата. Такой подход помогает избежать несправедливости, которая может возникнуть, если сложные или легкие вопросы оцениваются одинаково. Главное преимущество такой системы оценивания состоит в том, что она проста в использовании и легко объяснима. Этот метод помогает преподавателям оценивать знания студентов не только по количеству правильных ответов, но и по уровню сложности вопросов, а также по времени, которое понадобилось для их выполнения, что делает оценку более справедливой и понятной для студентов.

Анализ успеваемости студентов, обучающихся на онлайн-платформах, преимущественно фокусируется на двух задачах (см., например, обзоры [10 ; 11]): предсказании текущей академической успеваемости и оценке риска прекращения обучения. Для решения этих задач исследователи используют различные данные, такие как частота взаимодействия с платформой, точность от-

ветов на задания, время, затраченное на просмотр видеоматериалов и чтение текстов, а также информация о курсе и характеристики зачисленных студентов. Эти данные принято разделять [12] на два типа: статические (фиксированные на момент начала обучения: например, возраст или пол) и динамические (формируемые в процессе обучения: например, история взаимодействия с системой, успехи и ошибки при выполнении заданий). Подобные подходы широко применяются в области Educational Data Mining и ориентированы на построение моделей, предсказывающих будущее поведение обучающихся и их результаты.

Онлайн-курсы расширяют доступ к образованию, особенно для групп, сталкивающихся с ограничениями традиционной системы обучения. В работе [13] исследуется гибридная модель массовых открытых онлайн-курсов (МООС) для школьников, включающая личное наставничество. Такой подход сочетает гибкость онлайн-формата с контролем и поддержкой со стороны наставника, что способствует повышению эффективности обучения. Исследование направлено на оценку как общей эффективности курсов, так и вклада очного наставничества в учебный процесс. Авторы предлагают вероятностные модели для прогнозирования успеваемости учащихся на итоговых тестах. Модели анализируют поведенческие паттерны учащихся и их связь с экзаменационными результатами. Особое внимание уделяется социальному взаимодействию между учащимися, что позволяет строить коллективные прогнозы. Даже в отсутствие прямых наблюдений такого взаимодействия модели используют скрытые параметры, отражающие динамику совместного обучения. Результаты показывают, что совместный учет индивидуальных и социальных факторов повышает точность прогнозов на 6,8 % по сравнению с методами, основанными исключительно на изучении наблюдаемых индивидуальных данных.

В статье [14] рассматривается прогнозирование результатов обучения на основе взаимодействия между учащимися. Предлагается модель коллективного интеллекта, основанная на принципах предсказательной обработки и теории активного вывода. В этой модели каждый участник группы не только прогнозирует собственные действия, но и учитывает действия и намерения других участников, что позволяет группе адаптироваться к изменяющимся условиям и добиваться общих целей. Коллективное решение

формируется на основе взаимодействия между участниками, при этом каждый корректирует свои действия в ответ на получаемые сигналы и наблюдения. Такой подход способствует более глубокому пониманию механизмов работы коллективного интеллекта, при которых группы принимают решения, превосходящие возможности отдельных участников. Обмен информацией и формирование общих предсказаний внутри группы ведут к более скоординированным и эффективным действиям. Коллективный интеллект возникает как результат динамики совместного обучения и принятия решений, что может быть полезно как в контексте онлайн-курсов, так и в системе рекомендаций академических направлений.

Как уже отмечалось во введении, настоящее исследование принципиально отличается от упомянутых работ постановкой научной задачи. В отличие от существующих подходов, в которых показатели успеваемости выступают в роли целевых переменных, в рассматриваемом исследовании предполагается, что эти данные уже известны и доступны для анализа, а задача состоит в построении их скорректированной оценки. Ключевая особенность проблемы заключается в высокой размерности исходных данных.

Далее рассмотрим исследования, посвященные оцениванию и повышению качества обучения на основе обратной связи от студентов. В работе [15] авторы анализируют проблему визуализации и интерпретации студенческих отзывов, полученных в ходе опросов. Как правило, такие опросы включают количественные оценки (баллы) и качественные комментарии (текстовые отзывы). Авторы отмечают, что в отличие от количественных данных, анализ текстовых комментариев требует значительных временных затрат и применения сложных методов обработки естественного языка. В статье предлагается метод визуализации качественных отзывов, основанный на выделении ключевых аспектов преподавания и тональности студенческих комментариев по каждому из этих аспектов. Цель подхода заключается в оказании помощи преподавателям для выявления системных проблем, улучшении качества обучения и уделении внимания общим тенденциям в отзывах, включая анализ негативных мнений. Авторы также указывают на огра-

ничения предложенного метода, связанные с точностью анализа тональности (т. е. корректного определения позитивной или негативной направленности комментария) и общей достоверностью данных опросов. В конце исследования рассматриваются направления дальнейшего развития метода для создания надежного и практически применимого инструмента анализа обратной связи от студентов.

Некоторые университеты применяют стандартизированные инструменты для оценки преподавательской деятельности, включая IDEA (Instructional Development and Effectiveness Assessment) и TBI (Teacher Behaviours Inventory) [16]. Оба инструмента предназначены для сбора и анализа обратной связи от студентов с целью обеспечения объективной оценки качества преподавания. Инструмент IDEA фокусируется на оценке степени усвоения учебного материала и учитывает не только прямые оценки преподавателя, но и контекстуальные факторы, такие как мотивация студентов, воспринимаемая сложность курса, внеаудиторные усилия обучающихся, объем и трудоемкость учебной нагрузки. Инструмент TBI ориентирован на поведенческие аспекты преподавания. Он операционализирует педагогическую деятельность через набор измеримых компонентов: ясность изложения, использование примеров и наглядных материалов, вовлечение студентов в дискуссии, структурированность курса, коммуникативный контакт с аудиторией и применение цифровых технологий в обучении. Оба подхода направлены на предоставление преподавателям структурированной обратной связи, что позволяет корректировать методики преподавания с учетом особенностей учебной группы. Согласно мнению авторов статьи [16], применение систем TBI и IDEA помогает университетам и преподавателям не только улучшить качество преподавания, но и адаптировать курсы в зависимости от особенностей студентов.

2. Математическая модель. Основной алгоритм

Процесс освоения учебных курсов может быть формально представлен в виде двудольного графа $G(S, C, M)$, имеющего весовые коэффициенты на вершинах и ребрах (рис. 1).

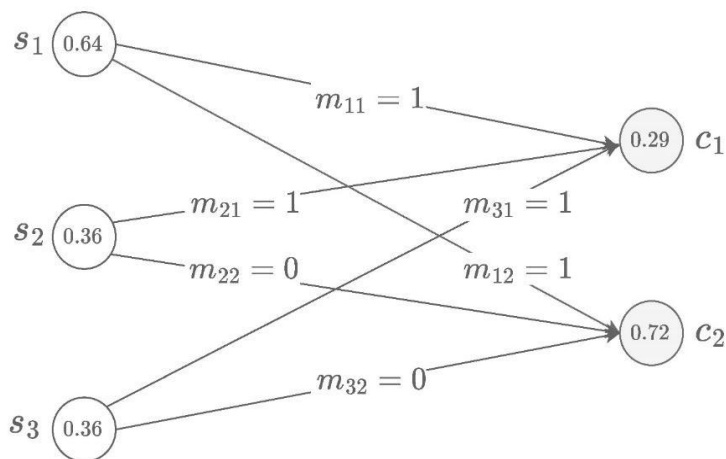


Рис. 1. Пример байесовской сети, где s_i — i -й студент, c_j — j -й курс (тема), m_{ij} — оценка i -го студента за j -й курс (1 — зачет, 0 — незачет). Для s_j в вершинах обозначены численные значения успеваемости, для c_j — численные значения сложности

Example of a Bayesian network, where s_i — is the i -th student, c_j — is the j -th course (topic), m_{ij} — is the i -th student's grade for the j -th course (1 — for pass, 0 — for fail). For s_j the vertices denote numerical values, and for c_j — the numerical difficulty values

В таком представлении вершины s_i доли S графа представляют обучающихся (студентов), а вершины c_j доли C графа соответствуют учебным курсам, здесь и далее $i \in \{1, 2, \dots, N_{ST}\}$, $j \in \{1, 2, \dots, N_C\}$, где N_{ST} — количество студентов, а N_C — количество курсов. Вес ребра (s_i, c_j) , обозначаемый как m_{ij} , определяется следующим образом: вес равняется NaN, если студент s_i не приступал к освоению курса c_j ; равняется 0, если студент s_i не смог завершить курс c_j ; равняется 1, если студент s_i успешно завершил курс c_j .

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели для каждой пары «студент — курс» (i, j) доступны следующие данные: факт наличия попытки сдачи курса (т. е. приступал ли студент s_i к освоению курса c_j); исход предпринятой попытки (успешная или неуспешная сдача курса c_j студентом s_i).

Весовые коэффициенты на вершинах характеризуют:

- успеваемость студента s_i , обозначаемую как $\text{perf}(s_i)$;

- сложность курса c_j , обозначаемую как $\text{diff}(c_j)$.

При этом предполагается, что значения $\text{perf}(s_i)$ и $\text{diff}(c_j)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, где $\text{perf}(s_i) = 1$ соответствует максимальной академической успеваемости студента s_i ; $\text{diff}(c_j) = 1$ отражает наивысший уровень сложности курса c_j .

Подобная формализация типична для образовательных онлайн-платформ, где в качестве курсов c_j часто выступают тестовые задания. Альтернативные постановки задачи могут предусматривать иные интерпретации весовых коэффициентов на ребрах, такие как

оценочные баллы, полученные за курс; номер попытки, с которой был успешно завершён курс; временные затраты на освоение курса. В данной работе величины $\{\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j), m_{ij}\}$ рассматриваются как случайные переменные, вероятностные распределения которых будут описаны далее. Граф G в данном контексте представляет собой байесовскую сеть [17].

Основная задача исследования заключается в оценке параметров распределений случайных величин $\{\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j)\}_{i,j}$ на основе наблюдаемых значений матрицы $M = \{m_{ij}\}_{i,j}$. Полученные оценки предполагается использовать в качестве количественных показателей успеваемости студентов и сложности курсов. Для решения задачи мы предлагаем следующий алгоритм, реализованный на GitHub [18].

Алгоритм оценки параметров:

1. Задать априорные распределения (одинаковые внутри долей графа):

- для успеваемости студентов: $\text{perf}(s_i) \sim B(\alpha_p, \beta_p)$;

- для сложности курсов: $\text{diff}(c_j) \sim B(\alpha_d, \beta_d)$.

При этом предполагается совокупная независимость всех переменных.

2. Найти моду апостериорного совместного распределения $\{\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j)\}_{i,j}$ методом градиентного спуска при условии:

$$m(i, j) \sim B(p_{ij}), p_{ij} = 1 - \text{diff}(c_j)(1 - \text{perf}(s_i)),$$

наблюдения $\{m(i, j)\}_{i,j}$ независимы при фиксированных $\{\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j)\}$.

Замечание

— Алгоритм реализует байесовский вывод для $\{\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j)\}_{ij}$ по наблюдаемым данным $M = \{m_{i,j}\}$ с использованием аппроксимации максимального правдоподобия апостериорного распределения. Параметры распределений $\alpha_p, \beta_p, \alpha_d, \beta_d$ могут быть заданы: вручную; путем согласования средних и дисперсий с эмпирическими распределениями (например, по данным предыдущих или другой внешней информации); в виде неинформативных априорных значений [19].

— Применение МСМС-алгоритмов позволяет получить математическое ожидание апостериорных распределений, которые также можно использовать в качестве искомым оценок. Однако в данной задаче применение таких алгоритмов существенно увеличивает вычислительную сложность [20].

— Аналитический явный вид оценок моды и математического ожидания апостериорного распределения в общем случае, видимо, невозможен.

Возможны альтернативные спецификации $p_{i,j}$:

а) $p_{i,j} = \frac{\text{perf}(s_i)}{\text{perf}(s_i) + \text{diff}(c_j)}$ — в этом случае

успеваемость студента не зависит от того, насколько сложные курсы он сдал, а зависит лишь от количества сданных курсов. И, следова-

тельно, случай $p_{s,c} = \frac{p_s}{p_s + d_c}$ мало отличается от

классических методов оценивания;

б) $p_{i,j} = \exp\{-\text{diff}(c_j) \cdot (1 - \text{perf}(s_i))\}$ — рассмотрен в работе [21], где автор построил алгоритм на основе семплирования по Гиббсу [20], что снова требует больших вычислительных ресурсов.

Легко заметить, что эти спецификации не требуют нормировки $\text{perf}(s_i), \text{diff}(c_j) \in [0, 1]$.

— Байесовская постановка обеспечивает обработку пропущенных данных: ребра для не принятых попыток исключаются из функции правдоподобия, при этом оценки все еще можно построить для всех студентов и курсов.

— На практике основной интерес представляет ранжирование курсов по сложности и студентов по успеваемости, прямое сравнение абсолютных значений параметров не требуется.

Рассмотрим результаты алгоритма на искусственном примере, состоящем из двух курсов и трех студентов (см. рис. 1) при априорных распределениях $B(2, 2)$ для разных сценариев сдачи курсов студентами (таблица).

Результаты работы алгоритма с априорными распределениями $B(2, 2)$
Results of the algorithm with prior distributions $B(2, 2)$

№ п/п	Сценарий	Сложность курсов		Успеваемость студентов $\text{perf}(s_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$
		$\text{diff}(c_1)$	$\text{diff}(c_2)$	
1	Все студенты сдали все курсы	0,34	0,34	0,59
2	Все студенты сдали первый курс, все не сдали второй курс	0,27	0,80	0,35
3	Студент 1 сдал все курсы. Студенты 2—3 сдали только первый курс (см. рис. 1)	0,29	0,72	$\text{perf}(s_1) = 0,64$ $\text{perf}(s_2) = 0,36$ $\text{perf}(s_3) = 0,36$
4	Студент 1 сдал только первый курс. Студенты 2—3 сдали только второй курс	0,7	0,51	$\text{perf}(s_1) = 0,42$ $\text{perf}(s_2) = 0,39$ $\text{perf}(s_3) = 0,39$

Из анализа результатов таблицы можно легко заметить, что алгоритм адекватно отработал на одном-трех сценариях, где видно, кто из студентов и каких курсов должен иметь высокие показатели. При этом на сценарии 4 показано, что результаты соответствуют заявленной цели — поощрять студентов, которые сдают сложные курсы (успеваемость студента s_1 выше успеваемости студентов s_2, s_3).

3. Практическое применение модели: ранжирование школьников

3.1. Описание внешней задачи

Мы использовали алгоритм для задачи ранжирования школьников по направлениям подготовки вуза на основе данных с платформы medclass.

Проблема заключается в том, что платформа предлагает школьникам курсы по широкому спектру медицинских дисциплин — от хирургии до искусственного интеллекта в образовании. Учащиеся самостоятельно выбирают курсы в соответствии со своими интересами. На основе их активности на платформе необходимо отбирать наиболее перспективных абитуриентов для поступления по разнообразным направлениям подготовки в вузе, таким как биология, стоматология, медицинская кибернетика и др. Это приводит к двойственной структуре данных: они оказываются, с одной стороны, сильно разреженными, поскольку наборы курсов, релевантных разным профилям, могут практически не пересекаться, с другой стороны — быть существенно пересекающимися, поскольку одни

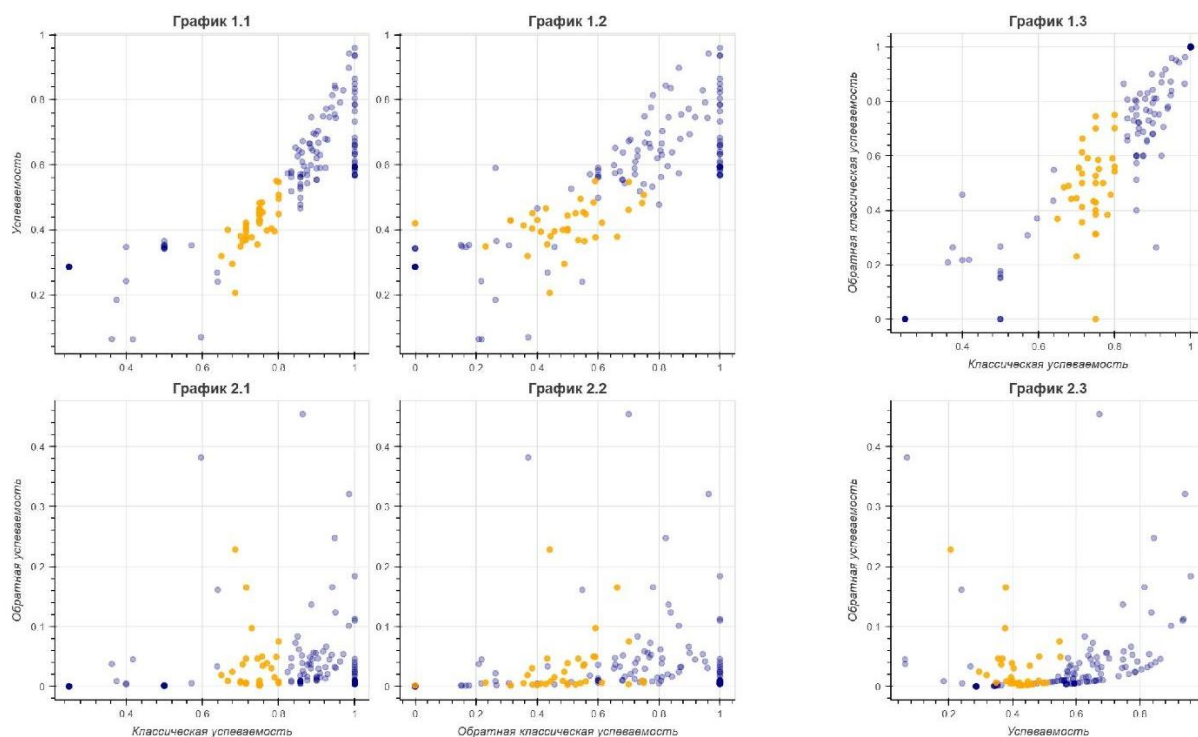


Рис. 2. Диаграммы рассеяния для четырех характеристик, оценивающих успеваемость студентов (определено на основе данных с онлайн-платформы medclass): оси на графиках 1.1, 1.2, 2.1 и 2.2 наследуются естественным образом. Информация о студентах, которые имеют примерно одинаковую классическую успеваемость (от 0,668 до 0,856), выделена желтым цветом

Scatterplots for four characteristics assessing student performance (determined based on data from the medclass online platform): axes 1.1, 1.2, 2.1, and 2.2 in the graphs are naturally inherited. Students with approximately the same classical performance (from 0.668 to 0.856) are highlighted in yellow

Характеристики «обратная классическая успеваемость» и «обратная успеваемость» не обязаны быть взаимоднозначными, так как курс, который не сдают сильные студенты, не равносителен по сложности курсу, который не сдают слабые студенты (см. рис. 2, график 2.2). На графике 2.1 (см. рис. 2) показано, что характеристика «обратная успеваемость» не подходит для качественного описания успеваемости студентов, так как присутствует множество студентов с примерно одинаковой обратной успеваемостью ($\sim 0,05$), которые получили ее либо за счет большого количества сданных курсов (высокая классическая успеваемость), либо за счет сдачи меньшего количества, но сложных курсов (низкая классическая успеваемость). Такую дифференциацию можно получить, используя успеваемость $perf$ (см. рис. 2, график 2.3).

Заключение

В исследовании был разработан и апробирован метод совместной оценки успеваемости студентов $perf$ (s_i) и сложности учебных курсов $diff$ (c_j) на основе байесовских сетей. В отличие от традиционных подходов, таких как классическая успеваемость (доля успешно завершенных студентом курсов) или об-

ратная классическая успеваемость (доля неудач обучающихся в сданных студентом курсах), предложенный метод учитывает взаимосвязь между уровнем подготовки обучающегося и объективной сложностью дисциплины, обеспечивая более точную и справедливую дифференциацию.

Сравнительный анализ показал, что ни классическая, ни обратная успеваемость в отдельности не позволяют адекватно отразить реальный уровень знаний студентов: либо игнорируется сложность курсов, либо не учитываются индивидуальные способности обучающихся. В то же время введенная авторами величина $perf$, полученная алгоритмом, успешно объединяет эти аспекты в единую интерпретируемую систему оценивания.

Метод был протестирован на реальных данных, собранных с онлайн-образовательной платформы, что позволило продемонстрировать его работоспособность в условиях масштабного и разнообразного образовательного контекста. Предложенный алгоритм представляет собой обоснованный, прозрачный и практически применимый инструмент для одновременной оценки успеваемости и сложности курсов, превосходящий традиционные подходы по информативности и справедливости.

АЛГОРИТМ РАНЖИРОВАНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

Приложение к статье «Оценка сложности курсов и успеваемости обучающихся посредством байесовских сетей»

А. Свойства оценок, полученных алгоритмом

В данном разделе мы сформулируем и докажем ключевые свойства оценок, получаемых разработанным алгоритмом.

Для упрощения математических выкладок введем следующие обозначения: вместо perf и diff будем использовать p и d соответственно. Для указания номера студента используем индекс s , а для номера курса — индекс c . Таким образом, все величины успеваемости студентов и сложности курсов будут иметь следующий вид:

$$\vec{p} = (\text{perf}(s_1), \dots, \text{perf}(s_{N_{ST}})) \equiv (p_1, \dots, p_{N_{ST}}), \quad \vec{d} = (\text{diff}(c_1), \dots, \text{diff}(c_{N_c})) \equiv (d_1, \dots, d_{N_c}).$$

Мы предполагаем, что успеваемости студентов p_s и сложности курсов d_c являются независимыми случайными величинами с априорными бета-распределениями:

$$p_s \sim B(\alpha_p, \beta_p), s \in \{1, \dots, N_{ST}\}, \quad d_c \sim B(\alpha_d, \beta_d), c \in \{1, \dots, N_c\};$$

при фиксированных $\{p_s, d_c\}_{s,c}$ наблюдения $m_{s,c} \in \{NaN, 0, 1\}$ независимы, при этом если студент s предпринимал попытку сдачи курса c , то исход сдачи подчиняется распределению Бернулли:

$$m(s, c) \sim B(p_{s,c}).$$

Обозначим $M = \{m_{s,c}\}_{s,c}$, тогда апостериорное распределение имеет вид

$$P(\vec{p}, \vec{d} | M) = \frac{P(M | \vec{p}, \vec{d}) P(\vec{p}) P(\vec{d})}{P(M)} = \frac{1}{P(M)} \left(\prod_{s,c} P(m(s,c) | p_s, d_c) \right) \left(\prod_c P(d_c) \right) \left(\prod_s P(p_s) \right). \quad (1)$$

В последней формуле для улучшения читаемости используем следующее соглашение: под знаком вероятности опускается обозначение случайной величины, оставляя только ее значение. Например, вместо записи $P(X = x, Y = y)$ используем сокращенную форму $P(x, y)$. При этом соответствие между значениями и случайными величинами остается очевидным благодаря обозначению аргументов.

Для нахождения максимума плотности апостериорного распределения применяются оптимизационные методы. Наиболее вероятные значения (моды) апостериорных распределений определяются с помощью градиентных методов¹. Практическая реализация градиентных методов доступна в библиотеке `scipy.optimize`².

Далее суммирование по индексам s, c происходит только по тем индексам, для которых $m(s, c) \neq NaN$. Для краткости обозначим через $M_s = \sum_c m(s, c) \in Z_+$ — количество сданных курсов студентом s , через $\underline{M}_c = \sum_s (1 - m(s, c)) \in Z_+$ — количество студентов, которые не сдали курс c .

Случай аддитивной вероятности

Рассмотрим случай $p_{s,c} = \frac{p_s}{p_s + d_c}$.

Теорема

Пусть $p_{s,c} = \frac{p_s}{p_s + d_c}$. Тогда мода \hat{p}_s, \hat{d}_c апостериорного распределения величин p_s, d_c

— не зависит от того, какие конкретно курсы сдал тот или иной студент, а зависит лишь от переменных M_s, \underline{M}_c .

— удовлетворяет свойству: если $M_{s_1} > M_{s_2}$, то $\hat{p}_{s_1} > \hat{p}_{s_2}$.

Таким образом, успеваемость студента не зависит от того, какие курсы он сдал, а зависит лишь от количества сданных курсов. И, следовательно, случай $p_{s,c} = \frac{p_s}{p_s + d_c}$ мало отличается от классических методов оценивания (см. раздел 3.2).

¹ См.: Lu J. Gradient Descent, Stochastic Optimization, and Other Tales // arXiv: 2205.00832 [cs.LG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2205.00832>.

² См.: SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python / P. Virtanen и др. // Nature Methods. 2020. P. 261—272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2

Доказательство

Выпишем функцию правдоподобия.

$$\begin{aligned} \log P(M | \vec{p}, \vec{d}) &= \sum_{s,c} m(s,c) \log p_{s,c} + (1 - m(s,c)) \log(1 - p_{s,c}) = \sum_s M_s \log p_s + \sum_c M_c \log d_c - \sum_{s,c} \log(p_s + d_c), \\ &\quad (2) \\ \log P(\vec{p}) &\propto \sum_s (\alpha_p - 1) \log p_s + (\beta_p - 1) \log(1 - p_s), \\ \log P(\vec{d}) &\propto \sum_c (\alpha_d - 1) \log d_c + (\beta_d - 1) \log(1 - d_c), \end{aligned}$$

где символ \propto означает равенство с точностью до константы. Следовательно, апостериорная функция правдоподобия (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) &\propto \sum_s M_s \log p_s + \sum_c M_c \log d_c - \sum_{s,c} \log(p_s + d_c) + \\ &+ \sum_s (\alpha_p - 1) \log p_s + (\beta_p - 1) \log(1 - p_s) + \sum_t (\alpha_d - 1) \log d_c + (\beta_d - 1) \log(1 - d_c) = \\ &= \sum_s (M_s \log p_s + (\alpha_p - 1) \log p_s + (\beta_p - 1) \log(1 - p_s)) - \sum_c \log(p_s + d_c) + \text{function}(\vec{d}) = \\ &= \sum_t (M_c \log d_c + (\alpha_d - 1) \log d_c + (\beta_d - 1) \log(1 - d_c)) - \sum_s \log(p_s + d_c) + \text{function}(\vec{p}). \end{aligned}$$

Из последних двух равенств легко вычислить производные по всем p_s и d_c , которые определяют точку максимума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_s} \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) &= \frac{M_s + \alpha_p - 1}{p_s} - \frac{\beta_p - 1}{1 - p_s} - \sum_c \frac{1}{p_s + d_c}, s \in \{1, \dots, N_{ST}\}, \\ \frac{\partial}{\partial d_c} \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) &= \frac{M_c + \alpha_d - 1}{d_c} - \frac{\beta_d - 1}{1 - d_c} - \sum_s \frac{1}{p_s + d_c}, c \in \{1, \dots, N_C\}. \end{aligned}$$

Легко показать, что при любых фиксированных параметрах $\vec{d} \in [0, 1]^{N_C}$ уравнение $\frac{\partial}{\partial p_s} \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) = 0$ имеет единственное решение по \vec{p} . И аналогично, при любых фиксированных параметрах $\vec{p} \in [0, 1]^{N_{ST}}$ уравнение $\frac{\partial}{\partial d_c} \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) = 0$ имеет единственное решение по \vec{d} . Однако не получилось установить, что существует единственное решение по p_s, d_c для всей системы в целом:

$$\begin{aligned} \frac{M_s + \alpha_p - 1}{p_s} - \frac{\beta_p - 1}{1 - p_s} - \sum_c \frac{1}{p_s + d_c} &= 0, s \in \{1, \dots, N_{ST}\}, \\ \frac{M_c + \alpha_d - 1}{d_c} - \frac{\beta_d - 1}{1 - d_c} - \sum_s \frac{1}{p_s + d_c} &= 0, t \in \{1, \dots, N_C\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_p, \beta_p, \alpha_d, \beta_d > 0$.

Но можно заметить, что любое решение \vec{p}, \vec{d} системы уравнений (3) удовлетворяет следующим соотношениям:

- не зависит от того, какие конкретно курсы сдал тот или иной студент, так как этой информации попросту нет в уравнениях (3).
- если $M_{s_1} > M_{s_2}$, то $\hat{p}_{s_1} > \hat{p}_{s_2}$. Это следует из того, что первые равенства в (3) можно переписать в виде

$$M_s + \alpha_p - 1 = \frac{p_s(\beta_p - 1)}{1 - p_s} + \sum_c \frac{p_s}{p_s + d_c}.$$

Откуда, в силу возрастания правой функции по p_s , следует необходимое свойство. Теорема доказана.

Случай мультипликативной вероятности

Рассмотрим случай $p_{s,c} = 1 - \text{diff}(c) \cdot (1 - \text{perf}(s))$.

Теорема

Пусть $p_{s,c} = 1 - d_c \cdot (1 - p_s)$. Тогда мода (\hat{p}_s, \hat{d}_c) апостериорного распределения параметров p_s и d_c обладает следующими свойствами:

1. Значение (\hat{p}_s, \hat{d}_c) зависит от конкретного набора курсов, сданных каждым студентом.
2. Если наборы курсов, сданных студентами s_1 и s_2 , допускают попарное сопоставление, при котором каждый сданный курс студентом s_2 не сложнее некоторого сданного курса студентом s_1 , то $\hat{p}_{s_1} \geq \hat{p}_{s_2}$.

Для ясности уточним пункт 2. Обозначим результаты студента s как набор $(r_1(s), \dots, r_c(s))$, где $r_c(s)$ равняется d_c , если курс c сдан ($m(s, c) = 1$), но равняется 0, если курс не сдан ($m(s, c) = 0$).

Это означает, что существует перестановка π индексов $\{1, \dots, N_C\}$ такая, что

$$r_c(s_2) \leq r_{\pi(c)}(s_1) \text{ для всех } c \in \{1, \dots, N_C\}.$$

Доказательство

Аналогично равенствам (2), функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \log P(M | \vec{p}, \vec{d}) &= \sum_{s,c} m(s,c) \log p_{s,c} + (1 - m(s,c)) \log(1 - p_{s,c}) = \\ &= \sum_{s,c} m(s,c) \log(1 - d_c(1 - p_s)) + \sum_c M_c \log d_c + \sum_s (N_C - M_s) \log(1 + p_s). \\ \log P(\vec{p}, \vec{d} | M) &= \sum_{s,c} m(s,c) \log(1 - d_c(1 - p_s)) + \sum_c M_c \log d_c + \sum_s (N_C - M_s) \log(1 - p_s) + \\ &+ \sum_s (\alpha_p - 1) \log p_s + (\beta_p - 1) \log(1 - p_s) + \sum_t (\alpha_d - 1) \log d_c + (\beta_d - 1) \log(1 - d_c). \end{aligned}$$

Если производные по p_s, d_c приравнять к нулю, то после элементарных преобразований, получаем уравнения

$$\begin{aligned} f_s(p_s, \vec{d}) &:= \sum_c \frac{m(s,c)}{1 - (1 - p_s)d_c} + \frac{\alpha_p - 1}{p_s} = N_s + \alpha_p + \beta_p - 2, \quad s \in \{1, \dots, N_{ST}\}, \\ f_c(d_c, \vec{p}) &:= \sum_s \frac{m(s,c)}{1 - (1 - p_s)d_c} + \frac{\beta_d - 1}{1 - d_c} = N_s + \alpha_d + \beta_d - 2, \quad t \in \{1, \dots, N_C\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что функции $f_s(p_s, \vec{d}), f_c(d_c, \vec{p})$, стоящие в левой части равенств (4), убывают по p_s и возрастают по d_c соответственно. Причем $f_s(p_s, \vec{d}) \in [M_s + \alpha_p - 1, \infty], f_c(d_c, \vec{p}) \in [M_t + \beta_d - 1, \infty]$. Откуда следует, что для фиксированных значений \vec{d} всегда найдется единственное решение p_s для каждого из верхних уравнений (4), а для фиксированных значений \vec{p} всегда найдется единственное решение d_c для каждого из нижних уравнений (4).

Из уравнения (4) видно, что каждое значение p_s определяется не только количеством сданных курсов студентом s , но и их качеством (значениями d_c , для которых $m(s, c) = 1$). Таким образом, пункт 1 доказан.

Пункт 2 следует из того, что если сданные курсы s_1 сложнее сданных курсов s_2 , то $f_{s_1}(p, \vec{d}) \geq f_{s_2}(p, \vec{d})$.

Откуда в силу убывания функций $f_{s_1}(p) = f_{s_1}(p, \vec{d})$ вытекает пункт 2.

Теорема доказана.

Замечание

1. Без байесовской постановки (случай $\alpha_p = \beta_p = \alpha_d = \beta_d = 1$) левая часть уравнения (4) лежит в отрезке $[M_s, \sum_{t:m(s,c)=1} \frac{1}{1 - d_c}]$. Следовательно, если правый край последнего отрезка довольно мал, $\sum_{t:m(s,c)=1} \frac{1}{1 - d_c} < N_C$,

то решения уравнения (4) не существует. Для этого необходима байесовская постановка.

2. На синтетических данных можно увидеть, что если количество студентов растет до бесконечности ($N_{ST} \rightarrow \infty$), то сложность курса близка к доле студентов, не сдавших этот курс: $d_c \sim M_c / N_{ST}$. Аналогично для успеваемости студентов при увеличении количества курсов. Это вполне естественно, поскольку означает, что если бы мы могли бесконечно тестировать студента, то его успеваемость равнялась бы доле сданных курсов.

Параметрическая саморегенерация

В ходе эксперимента была продемонстрирована параметрическая саморегенерация модели: после генерации выборки и последующего применения к ней модель восстановила исходные параметры с погрешностью, уменьшающейся с ростом объема выборки (рис. 1 приложения).

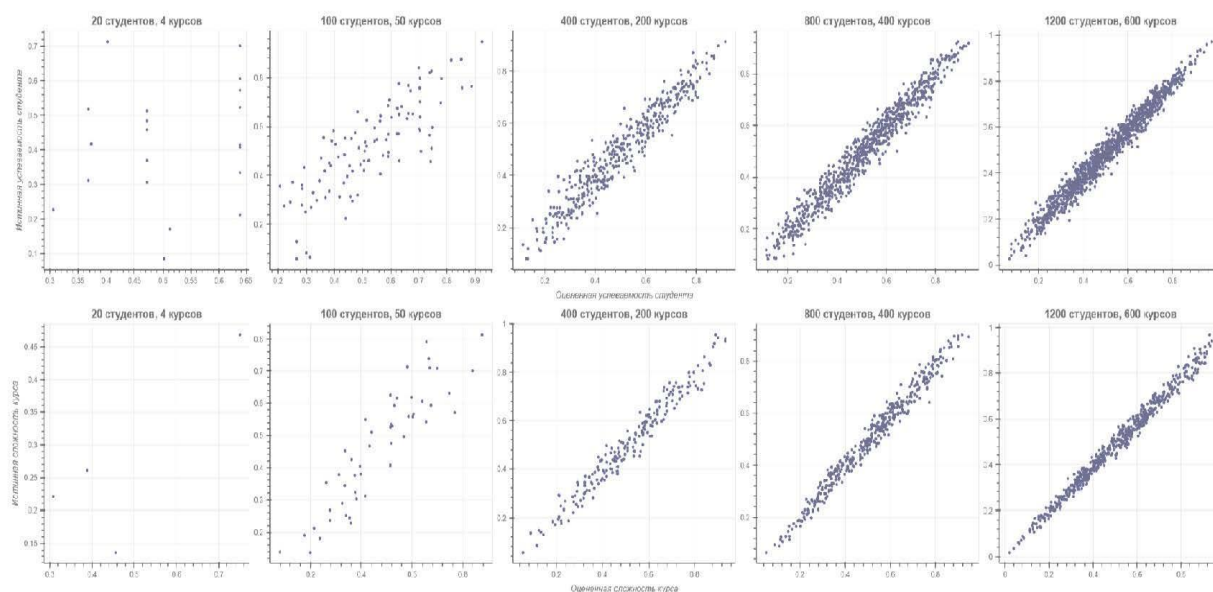


Рис. 1. Сходимость оцененных параметров к истинным на искусственных данных
Convergence of estimated parameters to the true values on artificial data

На графиках показано сравнение истинных параметров (ось абсцисс для всех графиков) с оцененными (ось ординат) (рис. 1 приложения). Первый ряд соответствует успеваемости студентов, второй ряд сложности курсов. Колонки слева направо соответствуют увеличению числа студентов и курсов (от (20,4) до (1200,600)). Видно, что с увеличением числа студентов и курсов точки сгущаются около прямой $y = x$, что означает сходимость модели.

Б. Ранжирование школьников по направлениям подготовки в вузе

Представим алгоритм ранжирования школьников по направлениям подготовки (НП) в вузе, а именно алгоритм HGS, и способ вычисления интереса школьников к направлениям. Напомним, что ранжирование школьников осуществлялось в два этапа:

1. На основе времени, затраченного на каждое НП, определялся интерес школьников к каждому НП. С помощью алгоритма, основанного на байесовских сетях, определялась успеваемость школьников для каждого НП.

2. На основе данных, полученных на первом этапе, с помощью алгоритма HGS строился стабильный матчиг, который задавал итоговое распределение школьников по НП.

Данные об активности школьников имели следующую структуру: каждому школьнику был сопоставлен список тем, которые он пытался сдать. Каждой теме из списка был сопоставлен список, содержащий информацию о каждой попытке сдать тему, в частности информацию о затраченном времени на каждую попытку. Также каждой теме был сопоставлен список связанных с ней НП.

Далее нам потребуются следующие обозначения: $S := \{s_1, \dots, s_{N_{ST}}\}$ — множество школьников; $AM = \{am_1, \dots, am_{N_{am}}\}$ — множество НП; $TH = \{th_1, \dots, th_{N_{th}}\}$ — множество тем; $i(s, am)$ — интерес школьника s к НП am ; $perf(s, am)$ — успеваемость школьника s на НП am ; $B(am)$ — ограничение на количество школьников по НП am .

Вычисление интереса школьника к направлению

Обозначим через $rel(am)$ множество тем, относящихся к направлению am , а через $T_{total}(s, th)$ — общее время, затраченное школьником s на все попытки освоения темы th .

Общее время, затраченное школьником s на направление am , определялось как сумма времен по всем темам, относящимся к нему:

$$T_{total}(s, am) := \sum_{th \in rel(am)} T_{total}(s, th). \quad (5)$$

На основе этих величин интерес школьника s к направлению am_0 вычислялся как доля времени, потраченного на данное направление, в его максимальном времени, затраченном на любое из направлений:

$$i(s, am_0) := \frac{T_{total}(s, am_0)}{\max_{am \in AM} T_{total}(s, am)}. \quad (6)$$

Описание алгоритма HGS

Пару $(s_i, am_j) \in S \cdot AM$ будем называть приемлемой, если $i(s_i, am_j) \neq 0$. Направление am_j будем называть приемлемым для школьника s_i , если пара (s_i, am_j) является приемлемой. Обозначим A множество приемлемых пар.

Каждому школьнику $s_i \in S$ сопоставим список приемлемых направлений $list(s_i)$, упорядоченный по убыванию значения интереса. Каждому направлению $am_j \in AM$ сопоставим упорядоченный по убыванию $perf(s)$ список школьников $list(am_j)$, для которых оно является приемлемым.

Назначением M будем называть любое подмножество A . Если $(s_i, am_j) \in M$, то будем говорить, что s_i назначен am_j , а am_j назначено s_i . Для любого элемента $q \in S \cup AM$ множество назначенных ему в M элементов будем обозначать $M(q)$. Будем говорить, что школьник $s_i \in S$ не распределен, если $M(s_i) = \emptyset$; иначе будем говорить, что s_i распределен. Аналогично будем говорить, что направление $am_j \in AM$ не заполнено, если $|M(am_j)| < B(am_j)$; заполнено, если $|M(am_j)| = B(am_j)$; переполнено, если $|M(am_j)| > B(am_j)$.

Матчингом будем называть назначение M такое, что $M(s_i) \leq 1, \forall s_i \in S$ и $M(am_j) \leq B(am_j), \forall am_j \in AM$.

Будем говорить, что пара $(s_i, am_j) \in A \setminus M$ блокирует матчинг M , если выполнены следующие два условия:

- школьник s_i не распределен, или am_j выше в его списке предпочитаемых направлений, чем $M(s_i)$;
- направление am_j либо не заполнено, либо содержит в $M(am_j)$ школьника s_i , который расположен ниже s_i в списке $list(am_j)$ (или выполняются оба условия сразу).

Будем называть матчинг M стабильным, если не существует блокирующей его пары.

Алгоритм HGS работает следующим образом. Направления поочередно распределяют себе лучшего школьника из своего списка, причем если школьник уже распределен, то он удаляется с предыдущего направления. При распределении школьника s_i на направление am_j из $list(s_i)$ удаляются направления ниже am_j . Таким образом, если школьник будет перераспределен, то новое направление будет более предпочтительно, чем предыдущее. Процесс продолжается пока есть направления, список которых содержит нераспределенных на это направление школьников (псевдокод алгоритма приведен на рис. 2 приложения).

```

M := ∅
while {существует незаполненное направление am_j такое, что list(am_j) содержит нераспределенных на это направление школьников} do
    s_i := лучший школьник в list(am_j) среди не распределенных на am_j
    if {M(s_i) ≠ ∅} then
        M := M \ {(s_i, M(s_i))}
    end if
    M := M ∪ {(s_i, am_j)}
    for {am_l ниже в списке s_i чем am_j} do
        A := A \ {(s_i, am_l)} (равносильно удалению am_l из list(s_i))
    end for
end while

```

Рис. 2. Псевдокод алгоритма HGS (алгоритм Гейла-Шепли, ориентированный на больницы)
HGS-algorithm pseudocode (Hospital-Oriented Gale-Shapley algorithm)

По исследованию¹, алгоритм HGS строит такой стабильный матчинг, что в нем для каждого направления am_j выполнено одно из следующих двух условий:

- на am_j распределены лучшие $B(am_j)$ школьников из возможных в любом стабильном матчинге;
- на am_j распределено $m < B(am_j)$ школьников, причем это же множество школьников распределено на am_j в любом стабильном матчинге.

¹ Gusfield D., Irving R. W. The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms. Cambridge, MA : The MIT Press, 1989. 240 p.

Список источников

1. *Beyond GPA and language proficiency: A systematic literature review of international students' academic success factors* / M. Kostromitina, B. Naismith, J. Burstein, L. Plonsky // *Review of Education*. 2025. Vol. 13, no. 2. DOI: 10.1002/rev3.70089 URL: <https://bera-journals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rev3.70089>
2. *Analysis of factors affecting the academic performance of university students using machine learning* / Y. R. Marin, L. Q. Huatangari, J. N. A. Tuesta и др. // *Scientific Reports*. 2025. Vol. 15, no. 1. DOI: 10.1038/s41598-025-28870-1 URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-025-28870-1>
3. *Рочев К. В., Куделин А. Г.* Проблемы прогнозирования успеваемости студентов: взаимосвязь результатов ЕГЭ и академических успехов // *Психологическая наука и образование*. 2025. Т. 30, № 1. С. 158—170. DOI: 10.17759/pse.2025300112
4. *Hoffman H. J., Elmi A. F.* Comparing Student Performance in a Graduate-Level Introductory Biostatistics Course Using an Online versus a Traditional in-Person Learning Environment // *Journal of Statistics and Data Science Education*. 2021. Vol. 29, no. 1. P. 105—114. DOI: 10.1080/10691898.2020.1841592 URL: <https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1841592>
5. *Pumpuang P., Srivihok A., Praneetpolgrang P.* Comparisons of classifier algorithms: Bayesian network, C4.5, decision forest and NBTree for Course Registration Planning model of undergraduate students // *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 2008. P. 3647—3651. DOI: 10.1109/ICSMC.2008.4811865 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4811865/>
6. *Using Bayesian Network for Planning Course Registration Model for Undergraduate students* / P. Pumpuang, A. Srivihok, P. Praneetpolgrang, S. Numprasertchai // *Second IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies*. 2008. P. 492—496. DOI: 10.1109/DEST.2008.4635194 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4635194/>
7. *Premalatha M., Viswanathan V.* Course Sequence Recommendation with Course Difficulty Index Using Subset Sum Approximation Algorithms // *Cybernetics and Information Technologies*. 2019. Vol. 19, no. 3. P. 25—44. DOI: 10.2478/cait-2019-0024
8. *Swart A. J.* Evaluation of Final Examination Papers in Engineering: A Case Study Using Bloom's Taxonomy // *IEEE Trans. on Educ.* 2010. Vol. 53, no. 2. P. 257—264. DOI: 10.1109/TE.2009.2014221 URL: <https://doi.org/10.1109/TE.2009.2014221>
9. *Goodarzi M. H., Amiri A.* Evaluating Students' Learning Progress by Using Fuzzy Inference System // *Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*. 2009. Vol. 3. P. 561—565. DOI: 10.1109/FSKD.2009.313
10. *A Systematic Review of Deep Learning Approaches to Educational Data Mining* / A. Hernandez, B. Herrera-Flores, D. Tomas, B. Navarro-Colorado // *Complexity*. 2019. P. 1—22. DOI: 10.1155/2019/1306039
11. *Nawang H., Makhtar M., Fazamin A.* A systematic literature review on student performance predictions // *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*. 2021. Vol. 8. DOI: 10.19101/IJATEE.2021.874521
12. *Dynamic Knowledge Modeling with Heterogeneous Activities for Adaptive Textbooks* / K. Thaker, Y. Huang, P. Brusilovsky, D. He // *The 11th International Conference on Educational Data Mining*. 2018.
13. *Tomkins S., Getoor L.* Understanding Hybrid-MOOC Effectiveness with a Collective SocioBehavioral Model // *Journal of Educational Data Mining*. 2019. Vol. 11, no. 3. DOI: 10.5281/zenodo.3594773 URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3594773>
14. *Kaufmann R., Gupta P., Taylor J.* An Active Inference Model of Collective Intelligence // *Entropy*. 2021. DOI: 10.3390/e23070830 URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/23/7/830>
15. *Cunningham-Nelson S., Laundon M., Cathcart A.* Beyond satisfaction scores: visualising student comments for whole-of-course evaluation // *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 2021. Vol. 46, no. 5. P. 685—700. DOI: 10.1080/02602938.2020.1805409
16. *Gravestock P., Gregor-Greenleaf E.* Student Course Evaluations: Research, Models and Trends // *Higher Education Quality Council of Ontario*. 2008. 149 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=POJ40AEACAAJ>
17. *Koller D., Friedman N.* Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques. Cambridge, MA : The MIT Press, 2009. 1272 p.
18. *Performance-difficulty-estimation [Electronic resource] : software implementation of Bayesian network approach for joint evaluation of course difficulty and student performance* / E. V. Efremov, A. V. Logachev, V. I. Nikitina, E. I. Prokopenko, M. D. Tokareva // *GitHub*. URL: <https://github.com/VitalinaNikitina/performance-difficulty-estimation> (accessed: 04.03.2026).
19. *Rasines D. G., Young G. A.* Chapter 2- Bayesian selective inference. // *Advancements in Bayesian Methods and Implementation. Handbook of Statistics*. 2022. Vol. 47. P. 43—65. DOI: 10.1016/bs.host.2022.06.006.
20. *Bayesian Data Analysis, Third Edition. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science* / A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, D. B. Rubin. Taylor & Francis, 2013. 675 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=ZXL6AQAQBAJ>
21. *Caron F.* Bayesian nonparametric models for bipartite graphs // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2012. Vol. 25. URL: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2012/file/0768281a05da9f27df178b5c39a51263Paper.pdf

References

1. Kostromitina M., Naismith B., Burstein J., Plonsky L. Beyond GPA and language proficiency: A systematic literature review of international students' academic success factors, *Review of Education*, 2025, vol. 13, no. 2. DOI: 10.1002/rev3.70089. Available at: <https://bera-journals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rev3.70089>
2. Marin Y.R., Huatangari L.Q., Tuesta J.N.A. et al. Analysis of factors affecting the academic performance of university students using machine learning, *Scientific Reports*, 2025, vol. 15, no. 1. DOI: 10.1038/s41598-025-28870-1. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41598-025-28870-1>
3. Rochev K.V., Kudelin A.G. Problemy prognozirovaniya uspevaemosti studentov: vzaimosvyaz' rezul'tatov EGEh i akademicheskikh uspehov [Problems of Predicting Student Academic Performance: Correlation Between Unified State Exam Results and Academic Success], *Psihologicheskaya nauka i obrazovanie* [Psychology and Education], 2025, vol. 30, no. 1, pp. 158–170. DOI: 10.17759/pse.2025300112
4. Hoffman H.J., Elmi A.F. Comparing Student Performance in a Graduate-Level Introductory Biostatistics Course Using an Online versus a Traditional in-Person Learning Environment, *Journal of Statistics and Data Science Education*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 105–114. DOI: 10.1080/10691898.2020.1841592. Available at: <https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1841592>
5. Pumpuang P., Srivihok A., Praneetpolgrang P. Comparisons of classifier algorithms: Bayesian network, C4.5, decision forest and NBTree for Course Registration Planning model of undergraduate students, *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2008, pp. 3647–3651. DOI: 10.1109/ICSMC.2008.4811865. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4811865/>
6. Pumpuang P., Srivihok A., Praneetpolgrang P., Numprasertchai S. Using Bayesian Network for Planning Course Registration Model for Undergraduate students, *Second IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies*, 2008, pp. 492–496. DOI: 10.1109/DEST.2008.4635194. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4635194/>
7. Premalatha M., Viswanathan V. Course Sequence Recommendation with Course Difficulty Index Using Subset Sum Approximation Algorithms, *Cybernetics and Information Technologies*, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 25–44. DOI: 10.2478/cait-2019-0024
8. Swart A.J. Evaluation of Final Examination Papers in Engineering: A Case Study Using Bloom's Taxonomy, *Journals & Magazines >IEEE Transactions on Education*, 2010, vol. 53, iss. 2, pp. 257–264. DOI: 10.1109/TE.2009.2014221 Available at: <https://doi.org/10.1109/TE.2009.2014221>
9. Goodarzi M.H., Amiri A. Evaluating Students' Learning Progress by Using Fuzzy Inference System, *Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 2009, vol. 3, pp. 561–565. DOI: 10.1109/FSKD.2009.313
10. Hernandez A., Herrera-Flores B., Tomas D., Navarro-Colorado B. A Systematic Review of Deep Learning Approaches to Educational Data Mining, *Complexity*, 2019, pp. 1–22. DOI: 10.1155/2019/1306039
11. Nawang H., Makhtar M., Fazamin A. A systematic literature review on student performance predictions, *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*, 2021, vol. 8. DOI: 10.19101/IJATEE.2021.874521
12. Thaker K., Huang Y., Brusilovsky P., He D. Dynamic Knowledge Modeling with Heterogeneous Activities for Adaptive Textbooks, *The 11th International Conference on Educational Data Mining*, 2018.
13. Tomkins S., Getoor L. Understanding Hybrid-MOOC Effectiveness with a Collective SocioBehavioral Model, *Journal of Educational Data Mining*, 2019, vol. 11, no. 3. DOI: 10.5281/zenodo.3594773. Available at: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3594773>
14. Kaufmann R., Gupta P., Taylor J. An Active Inference Model of Collective Intelligence, *Entropy*, 2021. DOI: 10.3390/e23070830. Available at: <https://www.mdpi.com/1099-4300/23/7/830>
15. Cunningham-Nelson S., Laundon M., Cathcart A. Beyond satisfaction scores: visualising student comments for whole-of-course evaluation, *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 2021, vol. 46, no. 5, pp. 685–700. DOI: 10.1080/02602938.2020.1805409.
16. Gravestock P., Gregor-Greenleaf E. Student Course Evaluations: Research, Models and Trends, *Higher Education Quality Council of Ontario*, 2008, 149 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=POJ40AEACAAJ>
17. Koller D., Friedman N. *Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques*. Cambridge, MA : The MIT Press, 2009, 1272 p.
18. Efremov E.V., Logachev A.V., Nikitina V.I., Prokopenko E.I., Tokareva M.D. Performance-difficulty-estimation: software implementation of Bayesian network approach for joint evaluation of course difficulty and student performance, *GitHub*. Available at: <https://github.com/VitalinaNikitina/performance-difficulty-estimation> (accessed: 04.03.2026).
19. Rasines D.G., Young G.A. Chapter 2 – Bayesian selective inference, *Advancements in Bayesian Methods and Implementation. Handbook of Statistics*, 2022, vol. 47, pp. 43–65. DOI: 10.1016/bs.host.2022.06.006.
20. Gelman A., Carlin J.B., Stern H.S., Dunson D.B., Vehtari A., Rubin D.B. *Bayesian Data Analysis, Third Edition: Texts in Statistical Science*, 2013, 675 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=ZXL6AQAAQBAJ>
21. Caron F. Bayesian nonparametric models for bipartite graphs, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2012, vol. 25. Available at: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2012/file/0768281a05da9f27df178b5c39a51263Paper.pdf

Информация об авторах

Ефремов Егор Владимирович — аспирант, стажер-исследователь, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: e.efremov@g.nsu.ru

Логачев Артем Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: omboldovskaya@mail.ru

Никитина Виталина Игоревна — аспирант, стажер-исследователь, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: v.nikitina1@g.nsu.ru

Прокопенко Евгений Игоревич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: prokopenko@math.nsc.ru

Токарева Мария Дмитриевна — младший специалист, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: v.nikitina1@g.nsu.ru

Information about the authors

Egor V. Efremov — Postgraduate Student, Research Intern, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: e.efremov@g.nsu.ru

Artem V. Logachev — Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Research Fellow, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: om-boldovskaya@mail.ru

Vitalina I. Nikitina — Postgraduate Student, Research Intern, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: v.nikitina1@g.nsu.ru

Evgeny I. Prokopenko — Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: pro-kopenko@math.nsc.ru

Maria D. Tokareva — Junior Specialist, Novosibirsk National Research State University (NSU), Novosibirsk, Russian Federation. Email: v.nikitina1@g.nsu.ru

Статья поступила в редакцию 13.03.2026; одобрена после рецензирования 26.03.2026; принята к публикации 06.04.2026.
The article was submitted 13.03.2026; approved after reviewing 26.03.2026; accepted for publication 06.04.2026.